ResearchGate

See discussions, stats, and author profiles for this publication at: https://www.researchgate.net/publication/362155425

كتاب بحوث العمليات- الجزء الأول - بداوي محمد

Book · July 2022

CITATIONS
0

1 author:

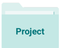


Badaoui Mohamed
Université Amar Telidji Laghouat

9 PUBLICATIONS **1** CITATION

SEE PROFILE

Some of the authors of this publication are also working on these related projects:



La Nouvelle Vision De L'Évaluation De La Performance Du Groupe De Travail : La Théorie Binaire View project

All content following this page was uploaded by Badaoui Mohamed on 21 July 2022.

The user has requested enhancement of the downloaded file.



بحوث العمليات

Operations Research

$$ST\begin{cases}\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \\ x_j \geq 0 \quad , \quad a_j \geq 0\end{cases} \quad F_j(S_j) = \max_{x_j}\left[f_j(x_j)F_{j-1}(S_{j-1})\right]$$

الدكتور

محمد بداوي

لطلبة العلوم
الاقتصادية
التسيير
التجارية
التكنولوجية



دار الضحى للنشر والإشهار

الجلفة - الجزائر

Dareldouha2014@gmail.com

027،92،27،38/05.50.87.37.71

الطبعة الأولى

2022

الإيداع القانوني: جويلية

ردمك: 978-9931-835-81-3

حقوق التأليف محفوظة للمؤلف

تصميم وتنسيق حمدي مصطفى الأزهر

hamdilazhar3@gmail.com



بحوث العمليات – الجزء الأول

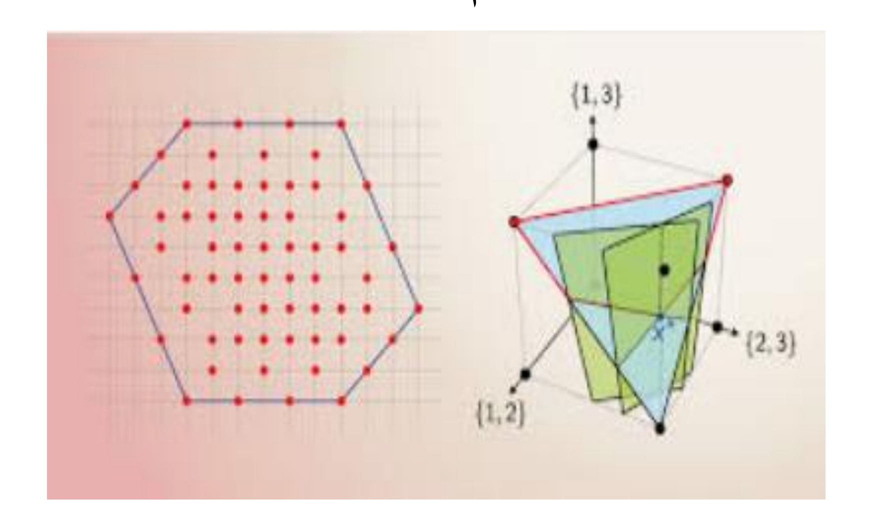
Operations Research

الدكتور: محمد بداوي

لطلبة:

– العلوم الإقتصادية و علوم التسيير والعلوم التجارية

– العلوم التكنولوجية



مع التطبيق على برنامج Maple

قال الله عز وجل في كتابه الحكيم:

﴿ وَقُلِ اعْمَلُوا فَسَيَرَى اللَّهُ عَمَلَكُمْ وَرَسُولُهُ وَالْمُؤْمِنُونَ ﴾

[سورة التوبة: 105]

دعاء

إذا مررتم من هُنا رشوا رذاذًا باردًا من دعواتكم لأمي تسعدها في قبرها، اللهُم فردوساً ونعيماً غير مقطُوع اللهُم أرحم أمي برحمتك التي وسعت كل شي، اللهم أجعل ثواب كل من يقرأ هذا الكتاب ويستفيد منه في ميزان حسناتي وميزان حسنات أمي (الحاجة ستي بداوي).

أمي جنة الدنيا تحت قدميك وأنت من سهرتِ على تربيتي وراحتي في صغري وكم نلتِ من معاناة تجاهي ولولاكِ بعد الله ما صرت وما تعلمت.

اللهم أرحم أمي وأغفر لها وأجعل قبرها روضةً من رياض الجنة هي وجميع أموات المسلمين.

فهرس الكتاب: بحوث العمليات (الجزء 1+2)

مقدمة:

الحمد لله رب العالمين ، والصلاة والسلام على خاتم النبيئين وسيد المرسلين، نبينا محمد الهادي الأمين الذي بعثه الله رحمة للعالمين، وعلى أله وأصحابه وأنصاره وأتباعه ومن أهتدى بهديه وعمل بسنته إلى يوم الدين، و بعد:

يتضمن هذا الكتاب دروس موجهة الى طلبة ليسانس (علوم اقتصادية وعلوم تسيير والعلوم تجارية والعلوم التكنولوجية)، كما يمكن لطلبة الرياضيات الاستفادة منه أيضا ، وشعر المؤلف بالحاجة لمثل هذا الكتاب من خلال تدريسه لمقياس الرياضيات ، ومن خلال إشرافه على عدد من المذكرات، ويمكن أن يكون هذا الكتاب بما يحويه ، وبما يتضمنه من أمثلة تطبيقية عديدة، ذو فائدة لقطاع واسع من القراء المهتمين بالرياضيات التطبيقية والأدوات الكمية المطبقة في الاقتصاد و المؤسسة.

إن هذا الكتاب كأي نتاج علمي لا يخلو من النواقص والهفوات، وكل أملنا أن يسهم في تطوير البحث العلمي.

أتقدم بشكري إلى أخي **بن دومة محمد الطاهر** وذلك لتصميمه الرائع لغلاف هذا الكتاب ، ونسأل الله أن يجعل هذا العمل خالصا لوجهه الكريم، ويجعله في ميزان حسناتنا، وأن ينفع به الطلاب والدارسين، وأي ملاحظة علمية يرجى إرسالها عبر بريدنا الالكتروني التالي: m.badaoui@lagh-univ.dz

و الله الموفق

المؤلف الأغواط – الجزائر- 2022/06/22

الفصل الأول : مراجعة بعض المفاهيم العامة في الجبر الخطي

1-1- أهمية الجبر الخطي في بحوث العمليات:

الجبر الخطي له دور كبير في كل فروع الرياضيات ، فنجد دوره في بحوث العمليات وبالضبط في البرمجة الخطية ، نظرية المباريات، سلاسل ماركوف،... التي تعتمد اعتمادا كبيرا في حساباتها على الحساب المصفوفي .

1-2- أهمية الفضاء الشعاعي:

أهمية الأشعة تكمن في معالجتها لكميات متعددة الأبعاد ، مثل شعاع السعر $P=\left(P_1,......,P_n\right)$ ومن الضروري عند استخدام هذه الأشعة توفير بنية كافية لجميع الأشعة، هذا هو هدف الفضاء الشعاعي.

تعريف:

الفضاء الشعاعي هو مجموعة من الأشعة ، يمكن إجراء عملية الجمع بين الأشعة وضربها في سلمي، إذن هذه المجموعة لها بنية تسمح بإجراء توليفات خطية، وعادة ما تكون السلميات أعداد حقيقية أو مركبة.

1-3- ماهية الفضاء الشعاعي:

لنعتبر E مجموعة أشعة على IR .

– يمكننا القيام بعملية جمع العناصر $(v,u)\in E$ في E و النتيجة تكون $(v+u)\in E$ في E، يطلق على هذا الجمع بالقانون الداخلي.

– يمكننا القيام بضرب أي عنصر من $v\in E$ بعدد حقيقي λ، والنتيجة تكون $\lambda v\in E$، يطلق على هذا الضرب بالقانون الخارجي.

ملاحظة1:

إذا كانت عملية الجمع و الضرب تحقق الخواص المطلوبة فنقول أن E هو فضاء شعاعي، المجوعة E هي عبارة عن الأشعة.

مثال: لنأخذ مثال السعر $P=(P_1,P_2)$ لنموذج التوازن الاقتصادي في هذه الحالة $E=IR^2$، نستطيع اجراء عملية جمع أشعة الأسعار وضرب شعاع السعر بثابت.

الجمع البسيط معرف كما يلي:

إذا كان $P=(P_1;P_2)$ و $P'=(P_1';P_2')$ فأن: $P+P' \therefore (P_1+P_1';P_2+P_2')$.

عملية الضرب بسلمي معرفة كما يلي:

إذا كان $P=(P_1;P_2)$ و $\lambda\in IR$ فأن $\lambda P=(\lambda P_1;\lambda P_2)$ أي أن جميع الأسعار في الاقتصاد مضروبة في نفس المعامل λ.

1-4- الجماعة المولدة:

من بين فوائد الفضاء الشعاعي هو أننا نستطيع اعتبار كل شعاع من فضاء شعاعي وفق عدد محدود من الأشعة الثابتة ، وهذا من شأنه يبسط الحسابات.

تعريف:

إذا كانت $v_1, v_2, ..., v_k$ أشعة من E ، نسمي توليفة خطية للأشعة ، كل شعاع v من E ، يمكننا كتابته كما يلي:

$$\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k \in IR \ , \ \ v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_k v_k$$

قضية1:

إذا كانت $v_1, v_2, ..., v_k$ أشعة لفضاء شعاعي E ، إن مجموعة E' لتوليفات الخطية لهذه الأشعة هي فضاء شعاعي جزئي لـ E ، نقول أن E' مولد من طرف جماعة الأشعة $v_1, v_2, ..., v_k$ ، ونرمز له بـ $E' = vect(v_1, v_2, ..., v_k)$.

مثال1:

أكتب الشعاع التالي: $v = (2, -4, 10)$ كتوليفة خطية للأشعة التالية:
$e_3 = (4, -2, 1), e_2 = (2, 4, 6), e_1 = (1, 1, 1)$.

حل المثال1:

نفرض أن v يكتب على الشكل التالي: $v = xe_1 + ye_2 + ze_3$ ، حيث: z, y, x سلميات (أعداد حقيقة مجهولة) ، إذن لدينا:

$$\begin{aligned}(2, -4, 10) &= x(1,1,1) + y(2,4,6) + z(4,-2,1) \\ &= (x, x, x) + (2y, 4y, 6y) + (4z, -2z, z) \\ &= (x + 2y + 4z, x + 4y - 2z, x + 6y + z)\end{aligned}$$

إذن الجملة المكافئة تكون على النحو الاتي:

$$\begin{cases} x+2y+4z=2 \\ x+4y-2z=-4 \\ x+6y+z=10 \end{cases}$$

بعد حل الجملة نجد:

$$\begin{cases} x=-\frac{128}{9}, y=\frac{11}{3}, z=\frac{20}{9} \\ v=-\frac{128}{9}e_1+\frac{11}{3}e_2+\frac{20}{9}e_3 \end{cases}$$

1-5- الاستقلال الخطي:

عندما يتم إجراء حسابات خطية وخاصة عندما يتعلق الأمر بالجماعة $v_1, v_2, ..., v_k$ لأشعة E، من المهم معرفة ما إذا كان يجب التعامل مع كل هذه الأشعة أم لا ، و إذا كان من الممكن حذف البعض فأنه يتم التعبير عنها من منظور أخر، وهي معالجة هذه الجماعة هل هي حرة (الأشعة مستقلة عن بعضها البعض) أم مقيدة (الأشعة مرتبطة مع بعضها البعض).

تعريف:

نقول عن الشعاعان u و v من E أنهما مرتبطان إذا وجد $\lambda \in IR$ ، حيث: $v=\lambda u$ ، أو $u=\frac{1}{\lambda}v$.

مثال2:

1) في $E^2=IR$، الأشعة $u=(4,3)$ و $v=(8,6)$ مرتبطة لأن: $v=2u$.

2) بالمقابل إذا كان: $u=(4,9)$ و $v=(7,2)$ فأن u و v ليس مرتبطان.

3) إذا كان $u=(0,0)$ فأن u مرتبط مع كل شعاع v لأن: $u=\lambda v\ (\lambda=0)$.

تعريف:

نقول عن الأشعة $v_1,v_2,.....,v_k$ من E أنها مستقلة خطية، إذا كانت غير مرتبطة خطيا (والعكس صحيح).

إذا كانت الأشعة مستقلة خطيا، فأنه من المستحيل كتابة v_1 على شكل توليفة خطية $v_2,.....,v_k$ ، يعني: $v_1=\sum_{i\neq 1}\lambda_i v_i$ ، نفس الشيء مع v_2 لا يمكننا كتابة على شكل توليفة خطية $v_1,v_3.....,v_k$ ، يعني: $v_2=\sum_{i\neq 2}\lambda_i v_i$. وهكذا دواليك.

قضية2:

نقول عن الأشعة $v_1,v_2,.....,v_k$ من E أنها مستقلة خطية إذا تحققت المساواة : $\lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2+.....+\lambda_k v_k=0$ ، أي أن السلميات $\lambda_1=\lambda_2=....=\lambda_k=0$ ، (0) الشعاع المعدوم ، ونقول كذلك أن جماعة الأشعة $\{v_1,v_2,.....,v_k\}$ هي جماعة حرة (عكس مقيدة).

مثال3:

1) الشعاع $(8,2,2)$ هو عبارة عن توليفة خطية للأشعة : $(0,-2,2),(4,-2,6),(2,0,4)$،

$$(8,2,2)=3(4,-2,6)-4(0,-2,2)-2(2,0,4)$$

2) الأشعة : $w=(6,4,4,-2), v=(2,0,4,-2), u=(0,2,-4,2)$ مستقلة خطيا في IR^4 :

$$xu+yv+zw=(0,0,0,0)$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2y+6z=0 \\ 2x+4z=0 \\ -4x+4y+4z=0 \\ 2x-2y-2z=0 \end{cases}$$

هذه الجملة لها حل وحيد هو الحل الصفري.

1-6-المصفوفات:

مفهومها:

تلعب المصفوفات في عدة ميادين دورا هاما في تسهيل الحسابات ، إذ تعد المصفوفة نموذجًا للتحليل الاقتصادي، وهي عادة جدول يحتوي على n مدخلات.

تعريف:

A مصفوفة حقيقية $(n\times m)$ (n: يرمز للسطور و **m** : يرمز للأعمدة) ، هي جدول بقيم حقيقية ويكتب كما يلي:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdot & \cdot & a_{1m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdot & \cdot & a_{nm} \end{pmatrix}$$

ويختصر بالرمز التالي: $A=(a_{ij})_{n\times m}$.

مجموعة المصفوفات الحقيقية ذات حجم $(n \times m)$ ترمز بـ : $R^{n \times m}$.

تعريف: ليكن:

$$A = (a_{ij})_{n \times m} \quad , \quad B = (b_{ij})_{p \times q}$$

$$A = B \Leftrightarrow n = p \;\; , \;\; m = q \;\; ; \;\; \begin{cases} \forall i = 1, \ldots, n \\ \forall j = 1, \ldots, m \end{cases} \;\; ; \;\; a_{ij} = b_{ij}$$

1-7- العمليات على المصفوفات:

يقصد بالعمليات على المصفوفات تلك التي يمكن تطبيقها على المصفوفات، وهذه العمليات هي: الجمع، الطرح، الضرب، المنقول، المقلوب.

1-7-1- جمع المصفوفات:

لتكن A و B مصفوفتين لهما نفس الدرجة (لهما نفس عدد الصفوف وعدد الأعمدة)، ولتكن المصفوفة $(n \times m)$:

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdot & \cdot & b_{1m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1} & \cdot & \cdot & b_{nm} \end{pmatrix} , \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdot & \cdot & a_{1m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdot & \cdot & a_{nm} \end{pmatrix}$$

مجموع A و B ويكتب $A+B$ هي المصفوفة التي نحصل عليها بجمع العناصر المتناظرة.

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdot & \cdot & a_{1m}+b_{1m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1}+b_{n1} & \cdot & \cdot & a_{nm}+b_{nm} \end{pmatrix}$$

مثال4:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 8 & 10 & -12 \end{pmatrix} \ , \ B=\begin{pmatrix} 6 & 0 & 4 \\ -14 & 2 & 16 \end{pmatrix}$$

$$A+B=\begin{pmatrix} 2+6 & -4+0 & 6+4 \\ 8-14 & 10+2 & -12+16 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & -4 & 10 \\ -6 & 12 & 4 \end{pmatrix}$$

مبرهنة:

لتكن V مجموعة كل المصفوفات من الدرجة $(n\times m)$ على الحقل IK (هنا $IK=\mathbb{R}$)، عندئذ أي كانت المصفوفات $A,B,C\in V$ ، وأي كان العددان $k_1,k_2\in K$ ، فأن:

1) $(A+B)+C=A+(B+C)$	5) $k_1(A+B)=k_1A+k_1B$
2) $A+0=A$	6) $(k_1+k_2)A=k_1A+k_2A$
3) $A+(-A)=0$	7) $(k_1k_2)A=k_1(k_2A)$
4) $A+B=B+A$	8) $1\cdot A=A \ , \ 0\cdot A=0$

1-7-2- طرح المصفوفات:

إن ما ورد سابقا في عملية الجمع ينطبق تماما على عملية الطرح دون أي تغيير، شرط الأخذ بعين الاعتبار الاشارة.

مثال2: نأخذ نفس المصفوفتين السابقتين، عملية الطرح هي كما يلي:

$$A-B=\begin{pmatrix} 2-6 & -4-0 & 6-4 \\ 8+14 & 10-2 & -12-16 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 & -4 & 2 \\ 22 & 8 & -28 \end{pmatrix}$$

1-7-3- ضرب المصفوفات:

نميز عدة حالات لعملية الضرب:

- ضرب المصفوفة بثابت غير معدوم.
- ضرب شعاع أفقي بشعاع عمودي.
- ضرب مصفوفة بشعاع أفقي (أو بشعاع عمودي).
- ضرب مصفوفة بمصفوفة أخرى.

1-7-4- ضرب المصفوفة بثابت غير معدوم:

حاصل ضرب العدد k بالمصفوفة A يكتب kA أو ببساطة kA هو المصفوفة التي نحصل عليها بضرب كل عنصر من A بالعدد k.

$$\text{k}A=\begin{pmatrix} ka_{11} & \cdot & \cdot & ka_{1m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ ka_{n1} & \cdot & \cdot & ka_{nm} \end{pmatrix}$$

مثال5: ضرب المصفوفة A بالعدد 4 هو كما يلي:

$$4A=4\begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 8 & 10 & -12 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & -16 & 24 \\ 32 & 40 & -36 \end{pmatrix}$$

1-7-5- ضرب شعاع أفقي بشعاع عمودي:

لتكن A المصفوفة السطرية بحيث: $A_{(1,n)}$ ، و أن B المصفوفة العمودية بحيث: $B_{(n,1)}$ ، يشترط في عملية الضرب الشعاعين (أو حتى ضرب المصفوفة بشعاع أو ضرب مصفوفتين) تساوي الدليلان المتجاوران ، ويكون ناتج عملية الضرب له الدليلان المتباعدان، وهو عبارة عن مصفوفة بسطر واحد وعمود واحد، وتكون الكتابة كما يلي:

$$A_{(1,n)} \times B_{(n,1)} = C_{(1\ ,\ 1)}$$

الدليلان المتجاوران
الدليلان المتباعدان
الدليلان المتباعدان

مثال6:

$$\begin{bmatrix} 6 & 4 & -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \cdot 4 + 4(-2) + (-2)(-8) \end{bmatrix} = 32$$

1-7-8- ضرب مصفوفة بشعاع أفقي (أو بشعاع عمودي):

لتكن B مصفوفة بحيث: $B_{(n,m)}$ ، و أن A المصفوفة السطرية بحيث: $A_{(1,n)}$ ، نفس الشيء يشترط في عملية ضرب مصفوفة بشعاع تساوي الدليلان المتجاوران.

مثال7:

أوجد الجداء التالي:

$$A_{(1,2)}=\begin{pmatrix}2 & 5\end{pmatrix} \times B_{(2,3)}=\begin{pmatrix}2 & -4 & 6\\ 8 & 10 & -12\end{pmatrix}$$
$$=C_{(1,3)}\begin{pmatrix}2(2)+5(8) & 2(-4)+5(10) & 2(6)+5(-12)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}44 & 42 & -48\end{pmatrix}$$

من جهة أخرى لو كان جداء المصفوفتين كما يلي: $B_{(2,3)} \times A_{(1,2)}$ ، لكانت العملية مستحيلة لعدم تساوي الدليلان المتجاوران.

1-7-9- ضرب مصفوفة بمصفوفة أخرى:

لتكن A مصفوفة بحيث: $A_{(n,m)}$ ، و أن B مصفوفة أخرى بحيث: $B_{(m,n)}$ ، نفس الشيء يشترط في عملية الضرب مصفوفة بمصفوفة تساوي الدليلان المتجاوران، ونوضح عملية الضرب كما يلي:

$$\underset{A}{\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}} \text{X} \underset{B}{\begin{bmatrix}e & f\\ g & h\end{bmatrix}} = \underset{C}{\begin{bmatrix}ae+bg & af+bh\\ ce+dg & cf+dh\end{bmatrix}}$$

مثال8:

أوجد الجداء المصفوفي التالي:

$$A_{(3,2)}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix} \times B_{(2,3)}=\begin{pmatrix}2 & -4 & 6\\ 8 & 10 & -12\end{pmatrix} B_{(2,3)} \times A_{(1,2)}=C_{(3,3)}$$

$$\therefore C_{(3,3)}=\begin{pmatrix}1(2)+2(8) & 1(-4)+2(10) & 1(6)+2(-12)\\ 2(2)+0(8) & 2(-4)+0(10) & 2(6)+0(-12)\\ 3(2)+1(8) & 3(-4)+1(10) & 3(6)+1(-12)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}18 & 16 & -18\\ 4 & -8 & 12\\ 14 & -2 & 6\end{pmatrix}$$

ملاحظة1:

نلاحظ أن $A+B$ و $A-B$ و kA و $A\times B$ مصفوفات من الدرجة $(n\times m)$.

1-8- أنواع المصفوفات:

عناصر المصفوفة A نجد فيها دليلان i و j ، حيث الدليل i يشير إلى رقم السطر، أما j فيشير إلى رقم العمود، ويمكن كتابة المصفوفة بشكل مختزل كما يلي:

$$A=\left[\,a_{ij}\,\right]\ ,\ \left(i=1,2,....,n\ ;\ j=1,2,....,m\right)$$

نقول عن المصفوفة A ذات $(n\times m)$ بعدا، وإذا كان $m=n$ نسميها بالمصفوفة المربعة، غير ذلك تسمى مصفوفة مستطيلة، تسمى المصفوفة $1\times m$ شعاع أفقي أو مصفوفة سطرية ، مثل: $B=\left[a_1,a_2,.....,a_m\right]$ ، كما تسمى المصفوفة $n\times 1$ شعاع عمودي أو مصفوفة عمودية ، مثل: $C=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{bmatrix}$.

ملاحظة2:

كل عدد حقيقي يمكن أن ينظر إليه كمصفوفة من الشكل 1×1: $D=\left[a_{11}\right]$.

1-8-1- المصفوفة الصفرية: هي التي يكون جميع عناصرها عبارة عن أصفار، ونكتبها على الشكل التالي:

$$D_{nm} = \begin{pmatrix} 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 \end{pmatrix}$$

1-8-2- المصفوفة القطرية:

هي مصفوفة مربعة عناصر قطرها تسمى الأثر trace ، به أعداد ثابتة، أما باقي عناصر المصفوفة عبارة عن أصفار، ونكتبها على الشكل التالي:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \lambda_n \end{pmatrix}$$

حالة خاصة: إذا كان $\lambda_i = 1 \quad (i = 1, 2, ..., n)$ ، فهذه المصفوفة تسمى بالمصفوفة الوحدة ، ويرمز لها بالرمز I_n ، ونكتبها على الشكل التالي:

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 1 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix}$$

هناك رمز لكرونيكر يختصر لنا هذه المصفوفة وهو كما يلي: $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & ; i = j \\ 0 & ; i \neq j \end{cases}$

1-8-3- المصفوفة المثلثية:

وتنقسم إلى قسمين: مصفوفة مثلثية علوية ، وهي مصفوفة مربعة عناصرها الواقعة فوق القطر الرئيسي غير معدومة ، وعناصرها الواقعة تحت القطر الرئيسي معدومة،

بشكل مماثل هناك مصفوفة مربعة تسمى مصفوفة مثلثية سفلية عكس الأولى، ونكتبها على الشكل التالي:

$$T_S = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & a_{1n} \\ 0 & a_{21} & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \quad , \quad T_I = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdot & 0 \\ a_{21} & a_{21} & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{pmatrix}$$

1-8-4- المصفوفة المتناظرة:

هي مصفوفة مربعة تحقق عناصرها المساواة التالية: $a_{ij} = a_{ji}$.

مثال9:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

1-8-5- مصفوفة شبه المتناظرة: هي مصفوفة مربعة تحقق عناصرها المساواة التالية: $a_{ij} = -a_{ji}$.

1-9- المحددات:

مفهومها:

محدد مصفوفة هو أداة ضرورية في الجبر الخطي، فبفضله نعرف وجود مقلوب لمصفوفة ما ، وبالتالي إيجاد حلول لجملة معادلات خطية.

سنتطرق أولا إلى شرح المحددات من الرتبة الثانية في حل معادلات التوازن العام في السوق، وبعد شرح خواصها نمر إلى دراسة المحددات من الرتبة الثالثة والرابعة .

أولا: ليكن لدينا معادلة التوازن العام التالية:

$$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases} \quad ....(1)$$

حيث: a',a ; b',b ; c',c سلميات حقيقية و y,x مجهولان، يكون الحل انطلاقا من طريقة كرامر كالتالي:

$$x=\frac{cb'-c'b}{ab'-a'b} \quad , \; y=\frac{ac'-a'c}{ab'-a'b}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}=ab'-a'b \quad , \; \Delta_1=\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}=cb'-c'b \quad , \; \Delta_2=\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}=ac'-a'c$$

مثال10:

نعتبر الجملة التالية ، المطلوب : ايجاد y,x .

$$\begin{cases} 2x+5y=1 \\ 3x-2y=0 \end{cases} \; ; \; x=\frac{-2-0}{-4-15}=\frac{2}{19} \quad , \; y=\frac{0-3}{-4-15}=\frac{3}{19}$$

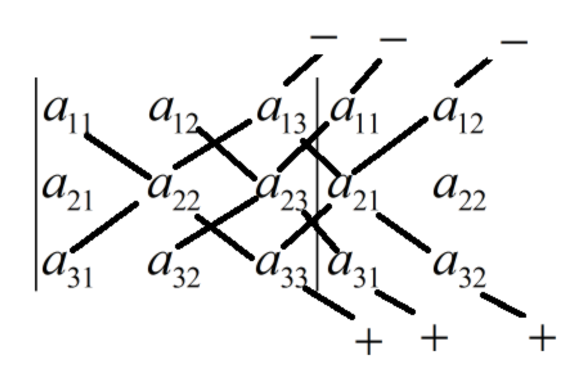
ثانيا: محدد مصفوفة مربعة من الرتبة 3:

طريقة1:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

يمكن تلخيص استعمال الاشارة كما يلي: $\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$

طريقة2: (sarrus): نضع بعد المحدد عناصر العمود الأول ثم عناصر العمود الثاني، ونقوم بالحساب كما هو مبين في الشكل التالي:



$$\Delta = (a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32}) -$$
$$(a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} + a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11} + a_{33} \cdot a_{21} \cdot a_{12})$$

مثال11:

أحسب محدد المصفوفة التالية:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

طريقة1:

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -(-2) - 0 - 2(1) = 0$$

طريقة2: (sarrus[1])

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}\begin{matrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{matrix}$$

$$\det(A) = [2+0+0]-[2] = 0$$

- محدد المصفوفة القطرية يعطى كما يلي:

$$\det\left(diag\left(a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}\right)\right) = a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn}$$

- محدد المصفوفة الواحدية يعطى كما يلي:

$$I_n = diag\left(\underbrace{1,1,....,1}_{n}\right) \Rightarrow \det(I_n) = 1$$

- محدد المصفوفة المنقولة يعطى كما يلي:

مبرهنة: $A \in M_n(IK) \;\; ; \;\; \det\left(A^t\right) = \det(A)$

- محدد الجداء:

قضية3: $A, B \in M_n(IK) \;\; ; \;\; \det(AB) = \det(A)\det(B)$

[1]- **بيير فريديريك ساروس Pierre Frédéric Sarrus (1798- 1861)** ، رياضياتي فرنسي .

1-10- منقول مصفوفة:

تعريف:

منقول المصفوفة A هو المصفوفة الناتجة عن A باستبدال الأعمدة بالأسطر، ونرمز لها بـ : A^t أو A' .

مثال12:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 5 & 4\\ 6 & 7 & 8\\ 9 & 3 & 2\end{bmatrix} \quad \therefore A^t=\begin{bmatrix}1 & 6 & 9\\ 5 & 7 & 3\\ 4 & 8 & 2\end{bmatrix}$$

قضية4:

لدينا الخواص التالية:

$$1)\ \ (A+B)^t = A^t + B^t$$
$$2)\ \ (\alpha A)^t = \alpha A^t$$
$$3)\ \ (AB)^t = B^t + A^t$$

إذا كانت المصفوفة مربعة فأن: $\det(A)=\det(A^t)$.

ملاحظة3:

المصفوفة A المتناظرة تحقق الخاصية التالية: $A^t = A$.

1-11-مقلوب مصفوفة:

نعلم أن المصفوفة المربعة تكون عكوسة إذا وفقط إذا كانت: أشعة أعمدتها مستقلة خطيا ، فينتج من ذلك:

- A عكوسة إذا وفقط إذا كان: $\det(A) \neq 0$.
- إذا كانت A عكوسة فأن: $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.
- مقلوب مصفوفة مربعة ما ، هو مصفوفة مثل B تحقق العلاقة التالية: $AB = BA = I_n$.

I_n : المصفوفة الواحدية ذات البعد n ، ونرمز لمقلوب المصفوفة A بـ : A^{-1} ، ونكتب: $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$.

تعريف:

نقول عن مصفوفة مربعة أنها شاذة ، إذا كان محدد المصفوفة يساوي الصفر، وإلا سميت منتظمة.

إذا كانت A عكوسة فأن : $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\, {}^{t}com(A)$

$com(A)$ المصفوفة المساعدة (المصاحبة A).

أوجد مقلوب المصفوفة التالية:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = (84 + 24) - (48) = 60$$

$$ {}^{t}com(A)=\begin{bmatrix} +\begin{vmatrix}0&6\\8&0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2&3\\8&0\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}2&3\\0&6\end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix}1&6\\7&0\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1&3\\7&0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1&3\\1&6\end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix}1&0\\7&8\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1&2\\7&8\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1&2\\1&0\end{vmatrix} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-48&24&12\\42&-21&-3\\8&6&-2\end{bmatrix} $$

$$ A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\,{}^{t}com(A)=\frac{1}{60}\begin{bmatrix}-48&24&12\\42&-21&-3\\8&6&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{4}{5}&\frac{2}{5}&\frac{1}{5}\\ \frac{7}{5}&-\frac{7}{20}&-\frac{1}{20}\\ \frac{2}{15}&\frac{1}{10}&-\frac{1}{30}\end{bmatrix} $$

1-12- جمل المعادلات الخطية:

مفهومها:

تلعب نظرية المعادلات الخطية دورا هاما في موضوع الجبر الخطي، إن كثير من المسائل الاقتصادية تؤول إلى دراسة مجموعة المعادلات الخطية، أي ايجاد نواة تطبيق خطي و معرفة الفضاء الجزئي الذي يحوي الأشعة.

للتبسيط نفرض أن كل المعادلات الواردة في هذه الفقرة هي على مجال الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$.

تعريف:

المعادلة الخطية في المجال الحقيقي $\mathbb{R}$ هي من الشكل:

$$ a_1x_1+a_2x_2+.....+a_nx_n=b \quad ; \quad (a_i,x_i\in\mathbb{R}) $$

حيث x_i كميات غير محددة (أو مجاهيل أو متغيرات)، وتسمى a_i معاملات x_i ، كما نسمي b بثابت المعادلة.

وتكون جملة معادلات خطية ذات mمعادلة و nمجهول كل جملة من الشكل:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

ملاحظة4:

إذا كانت الأطراف الثانوية $b_i = 0 \; ; \; \forall i \in \{1,2,....,m\}$ ، تسمى عندئذ هذه الجملة: بالجملة المتجانسة، وهناك تسمية أخرى بالجملة الخطية بدون طرف ثاني.

نميز ثلاث حالات عند حلنا لجملة معادلات خطية ، وللتسهيل نأخذ جملة المعادلات التالية:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

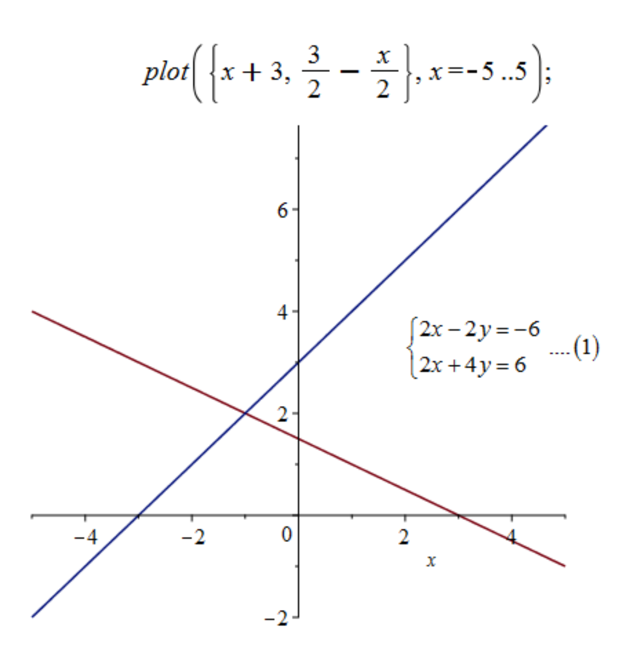
حيث: $a',a \; ; \; b',b \; ; \; c',c$سلميات حقيقية و y,xمجهولان، نلاحظ أن المعادلتين هما معادلتا مستقيم في مستوى مزود بمعلم ، نميز ثلاث حالات هي كما يلي:

1) **الحالة (1):** وجود حل وحيد (نقطة تقاطع المستقيمين).
2) **الحالة (2):** لا يوجد حلول (مستقيمين متوازيين و غير متقاطعين).

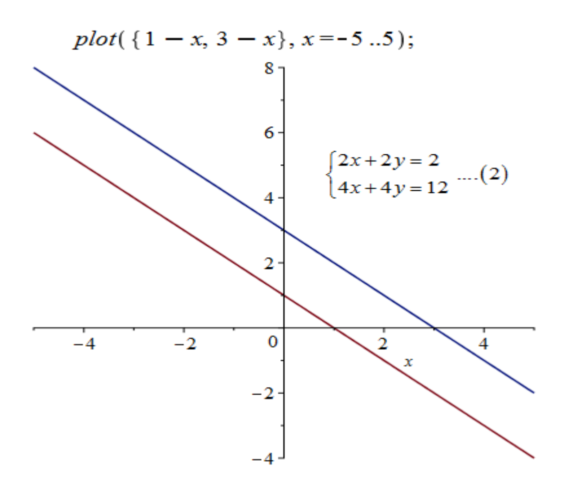
3) **الحالة (3):** وجود ما لانهاية من الحلول (مجموعة نقط أحد المستقيمين المتطابقين)

نوضح الحالات الثلاثة في الأشكال البيانية التالية:

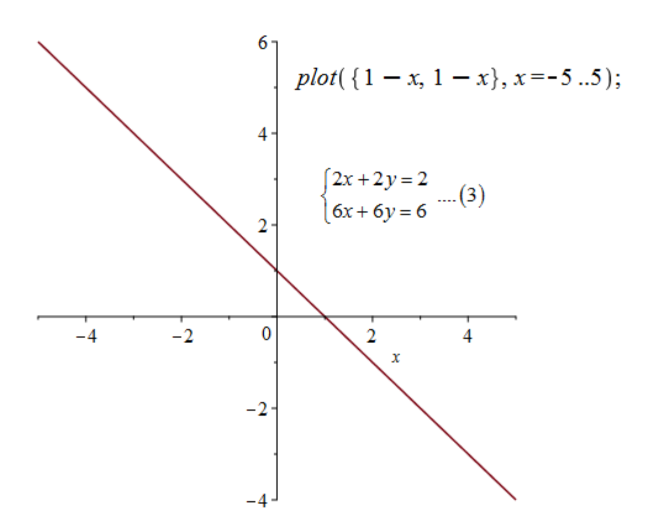
الشكل 1−1: تمثيل حالة مجهولين (الحالة1)



الشكل 1−2: تمثيل حالة مجهولين (الحالة2)



الشكل 1−3: تمثيل حالة مجهولين (الحالة3)



نفس الشيء بالنسبة لجملة معادلات (بثلاثة مجاهيل) هندسيا كل معادلة من الجملة هي معادلة لمستوي في الفضاء المزود بمعلم، حالات تقاطع هذه المستويات يمكن تلخيصها فيما يلي:

نميز ثلاث حالات هي كما يلي:

1) **الحالة (1):** وجود حل وحيد (نقطة تقاطع المستويات).
2) **الحالة (2):** وجود ما لانهاية من الحلول (مجموعة نقط أحد المستويات المتطابقة)
3) **الحالة (3):** لا يوجد حلول (مستويات متوازية و غير متقاطعة).

ونوضحها في الأشكال البيانية التالية:

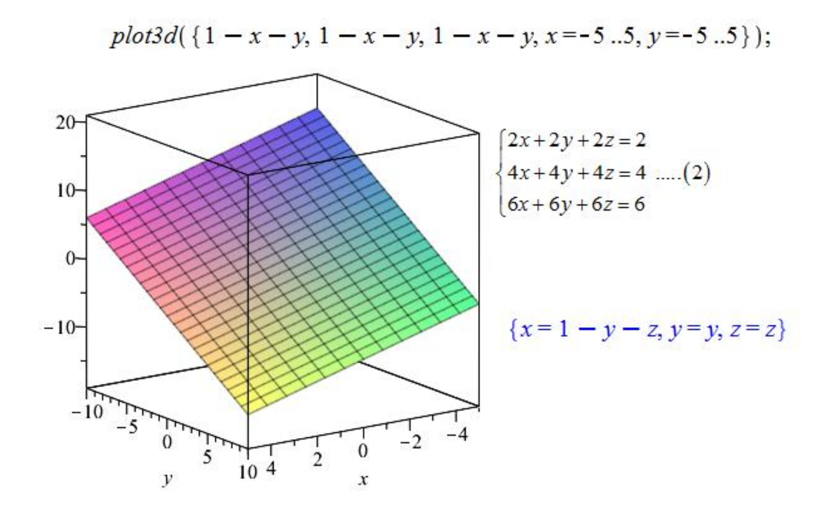
الشكل 1-4: تمثيل حالة ثلاثة مجاهيل (الحالة1)

$$plot3d\left(\left\{13 - x + y, x + \frac{5}{3}y + \frac{13}{3}, \frac{4}{6}x - \frac{y}{6} + \frac{4}{6}, x=-5..5, y=-5..5\right\}\right);$$

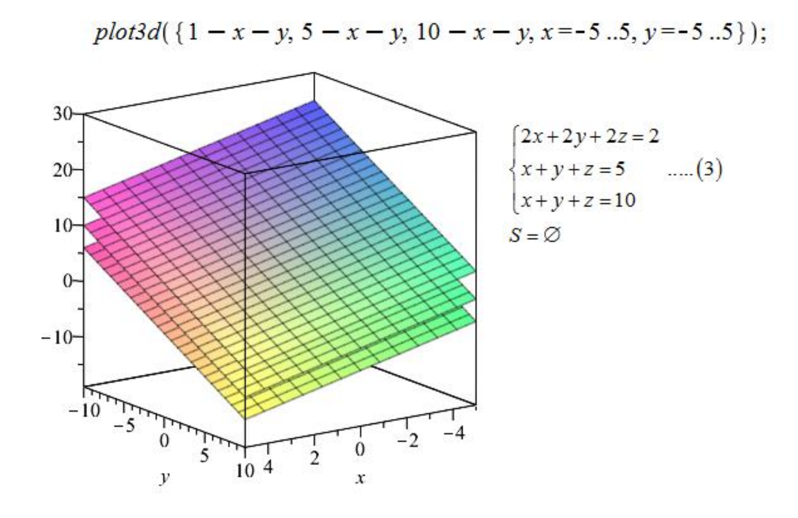
$$\begin{cases} x - y + z = 13 \\ 2x + 5y - 2z = -13 \quad .....(1) \\ 4x - y - 6z = -4 \end{cases}$$

$$\left\{x = \frac{313}{58}, y = -\frac{83}{29}, z = \frac{275}{58}\right\}$$

الشكل 1−5: تمثيل حالة ثلاثة مجاهيل (الحالة2)



الشكل 1−6: تمثيل حالة ثلاثة مجاهيل (الحالة3)



1-12-1- دراسة الحلول:

تعريف:

نسمي حلا للجملة S كل مرتب $y_1, y_2, ..., y_m$ من IK^m بحيث:

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + ... + a_{1m}y_m = b_1 \\ .... \\ .... \\ a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + ... + a_{nm}y_n = b_n \end{cases}$$

نسمي (V) بالصيغة الشعاعية للجملة (S)، كما تسمى (F) بالصيغة التابعية، والصيغة (M) بالصيغة المصفوفية ، وتمكننا هذه الصيغ من دراسة وجود حلولا للجملة (S)، و دراسة خواص هذه الحلول فإذا كان $y = y_1, y_2, ..., y_m$ حلا للجملة فأن $u(y) = b$ ، $u(x) = b \Leftrightarrow u(x - y) = 0$ ، ويعود البحث عن باقي الحلول إلى تعيين الأشعة من IK^m بحيث يكون $u(z) = 0$ ، أي أنه يتوجب علينا ايجاد نواة التطبيق u.

إذا وضعنا $z = z_1e_1 + ... + z_me_m$ فالجملة الخطية الموافقة للمعادلة $u(z) = 0$ تكون:

$$(S') = \begin{cases} a_{11}z_1 + a_{12}z_2 + ... + a_{1m}z_m = 0 \\ .... \\ .... \\ a_{n1}z_1 + a_{n2}z_2 + ... + a_{nm}z_n = 0 \end{cases}$$

تعريف:

نسمي (S') الجملة المتجانسة المشاركة أو المرافقة للجملة (S) ولما كانت نواة التطبيق الخطي فضاء شعاعي جزئيا من IK^m فأن حلول (S) مالم تكن مجموعة خالية هي فضاء جزئي تألفي من IK^m .

تعريف:

إذا كان عدد معادلات الجملة(S) مساويا عدد المجاهيل فأن المصفوفة المشاركة A تكون مصفوفة مربعة ومحددها يسمى محدد الجملة.

أولا: طريقة كرامر[1]:

تعريف:

نقول عن جملة معادلات خطية أنها جملة كرامر إذا كان عدد المعادلات مساويا لعدد المجاهيل، ومحدد مصفوفة الجملة غير معدوم.

مبرهنة: لجملة كرامر حل وحيد.

الاثبات:

1) للجملة حل نكتبه من الشكل المصفوفي $AX = B$ و A المصفوفة مربعة وعكوسة، نستنتج أن: $X = A^{-1}B$.

[1]- **غابرييل كرامر Gabriel Cramer (1704 - 1752)** ، رياضياتي سويسري.

2) للجملة حل وحيد، إذا كان X_2, X_1 حلين للمعادلة $AX = B$ ، فأن:

$AX_2 = B$, $AX_1 = B$ ، ومنه $A(X_1 - X_2) = AX_1 - AX_2 = 0$ ، ولكن

المصفوفة A مربعة وعكوسة، فنضرب الطرفين من اليسار بالمصفوفة A^{-1}

أي :

$$A^{-1}A(X_1 - X_2) = 0$$
$$\therefore X_1 - X_2 = 0$$
$$\therefore X_1 = X_2$$

لحساب الحل بطريقة كرامر نأخذ هذا المثال:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 2 \\ x + 6z = 0 \\ 7x + 8y = 3 \end{cases}$$

وهي جملة لثلاث معادلات خطية بثلاث مجاهيل.

أولا: نحسب محدد الجملة:

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix} = 60$ ، نلاحظ أن $\Delta = 60 \neq 0$ فالجملة حل وحيد.

ثانيا: ايجاد المحددات D_z, D_y, D_x حيث تكون قيم المجاهيل كما يلي:

$z = \dfrac{D_z}{\Delta}, y = \dfrac{D_y}{\Delta}, x = \dfrac{D_x}{\Delta}$.

$$D_x = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \\ 3 & 8 & 0 \end{vmatrix} = -60 \ , \ x = \frac{D_x}{\Delta} = \frac{-60}{60} = -1$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 6 \\ 7 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 75 \ , \ y = \frac{D_y}{\Delta} = \frac{75}{60} = \frac{5}{4}$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 7 & 8 & 3 \end{vmatrix} = 10 \ , \ z = \frac{D_z}{\Delta} = \frac{10}{60} = \frac{1}{6}$$

$$S = \left\{ x = -1 \ , \ \mathrm{y} = \frac{5}{4} \ , \ \mathrm{z} = \frac{1}{6} \right\}$$

ثانيا: طريقة غوص[1]:

إن طريقة كرامر ليست دائما سهلة التطبيق ، إن جملة معادلات تكون المصفوفة A ليست بالضرورة مربعة، في هذه الحالة طريقة كرامر لن تكون عملية في التطبيق، فنلجأ إلى إستخدام طريقة أخرى أسهل تسمى طريقة الحذف لغوص.

لتكت الجملة التالية:

$$\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ 4x + y = -2 \\ -2x + 2y + z = 7 \end{cases}$$

[1]- **يوهان كارل فريدريش غوص (1777- 1855) Johann Carl Friedrich Gauss** ، رياضياتي ألماني، لقب بأمير الرياضيات ويعد واحدًا من العلماء الثلاثة الأهم في تاريخ الرياضيات. كان رياضياتيًا وفيزيائيا ، ساهم بالكثير من الأعمال في نظرية الأعداد والإحصاء والتحليل الرياضي والهندسة التفاضلية والجيوديسيا وعلم الاستاتيكا الكهربائية وعلم الفلك والبصريات، لقب بأمير الرياضيين حيث يرقى إلى مستوى أكبر العلماء تأثيرا في تاريخ الرياضيات.

المطلوب: ايجاد قيم المجاهيل z, y, x ؟

تبدأ هذه الطريقة بطرح مضاعفات المعادلة الأولى من المعادلات الأخرى، ولهذا فأن حذف x من المعادلتين الاخرتين يتطلب:

1) ضرب (-2) في المعادلة الأولى ثم طرحها مع المعادلة الثانية.
2) نفس الشيء مع المعادلة الثالثة ضرب (1) في المعادلة الأولى ثم جمعها مع المعادلة الثالثة ، الجملة الناتجة تكون كما يلي:

$$\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ -y - 2z = -4 \\ 3y + 2z = 8 \end{cases}$$

المعامل (-2) والمضروب في x في المعادلة الأولى يعرف بأنه المفصل pivot ، في الخطوة الاولى للحذف.

في المرحلة الثانية من الحذف نتجاهل المعادلة الأولى.

بنفس الكيفية نضرب (3) في المعادلة الثانية، وبعدها يتم جمع المعادلتين، أي أن:

$$\begin{cases} -3y - 6z = -12 \\ 3y + 2z = 8 \end{cases} \therefore \{-4z = -4 \Rightarrow z = 1 \ , \ y = 2 \ , \ x = -1$$

$$S = \{x = -1 \ , \ \mathrm{y} = 2 \ , \ \mathrm{z} = 1\}$$

مثال13:

نحل الجملة السابقة (كرامر) بطرية غوص:

$$\begin{cases} x+2y+3z=2 \\ x+6z=0 \\ 7x+8y=3 \end{cases} \underset{\substack{L_1-L_2\to L_2 \\ 7L_1-L_3\to L_3}}{} \therefore \begin{cases} x+2y+3z=2 \\ 2y-3z=2 \\ -6y-21z=-11 \end{cases} \underset{3L_2+L_3\to L_3}{} \therefore \begin{cases} -30z=-5 \Rightarrow z=\dfrac{1}{6} \\ y=\dfrac{5}{4} \;,\; x=-1 \end{cases}$$

$$S=\left\{ x=-1 \;,\; y=\frac{5}{4} \;,\; z=\frac{1}{6} \right\}$$

أما التطبيق على Maple فهو كما يلي:

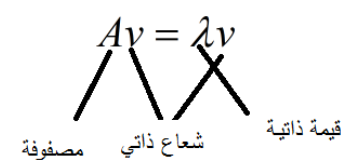
```
solve({ 2x + y + z = 1, -y - 2z = -4, 3y + 2z = 8}, {x, y, z});
                    {x = -1, y = 2, z = 1}
solve({ x + 2y + 3z = 2, x + 6z = 0, 7x + 8y = 3}, {x, y, z})
                    {x = -1, y = 5/4, z = 1/6}
```

1-13-القيم الذاتية و الأشعة الذاتية، تقطير المصفوفة:

مفهومها:

لقد كانت أهمية الفقرة السابقة في كيفية حل الجملة الخطية $AX=B$ ، في هذه الفقرة يلعب هذا الأمر دور ثانوي، لأن المسائل الجديدة تحل أيضا بواسطة تبسيط المصفوفة ، وذلك بجعلها قطرية أو مثلثية علوية، لا نهتم كثيرا بالحفاظ على فضاء الصف أو فضاء العمود للمصفوفة ، ولكن نهتم بالحفاظ على قيمتها الذاتية ، عمليات الصفوف لا تقوم بهذا العمل.

إذا كانت المصفوفة A مربعة ، فأن القيمة الذاتية والشعاع ذاتي يجعل المعادلة صحيحة (إذا كان بإمكان ايجادها).



سنرى كيف نتمكن من العثور على الحل، لكن دعونا نتبع هذه الخطوات:

مثال14:

لدينا المصفوفة التالية: $A = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ ، والشعاع الذاتي هو: $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ ، مع مطابقة القيمة الذاتية لـ 6، Av يعطى كما يلي: $\begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 24 \end{pmatrix}$ ، λv يعطى كما يلي:

$$6 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 24 \end{pmatrix}$$

نلاحظ أنها متساوية بحيث: $Av = \lambda v$ ، كيف تحصل هذه الأشياء ؟

نبدأ بإيجاد القيمة الذاتية، فنعلم أن هذه المعادلة لابد أن تكون صحيحة $Av = \lambda v$.

ندرج المصفوفة الواحدية:

$$Av = \lambda I v$$
$$\therefore Av - \lambda I v = 0$$

إذا كان v غير صفري، يمكننا أن نحل λ من أجل باستخدام المحدد: $|A - \lambda I| = 0$.

نستخدم المثال السابق:

$$\left|\begin{pmatrix}-6 & 3\\ 4 & 5\end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right| = 0$$

$$\therefore \begin{vmatrix}-6-\lambda & 3\\ 4 & 5-\lambda\end{vmatrix} = 0 \quad \therefore (-6-\lambda)(5-\lambda) - 12 = 0$$

$$\therefore \lambda^2 + \lambda - 42 = 0 \quad ; \quad (\lambda = -7 \vee \lambda = 6)$$

بعد معرفتنا للقيم الذاتية بقي لنا معرفة الأشعة الذاتية:

$$\begin{pmatrix}-6 & 3\\ 4 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = 6\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}-6x+3y=6x\\ 4x+5y=6y\end{cases} \therefore \begin{cases}-12x+3y=0\\ 4x-y=0\end{cases}$$

نلاحظ أن $y = 4x$ ، لذلك فأن الشعاع الذاتي هو أي مضاعف غير صفري لهذا $(1,4)$.

ونحصل على الحل: $\begin{pmatrix}-6 & 3\\ 4 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\ 24\end{pmatrix}$ ، ونحصل على الحل: $6\cdot\begin{pmatrix}1\\ 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\ 24\end{pmatrix}$ ، $Av = \lambda v$.

بالنسبة لـ $\lambda = -7$ يترك للقارئ ايجاد هذه الحالة.

لنعمم ذلك من خلال هذه الفقرة التالية: ليكن لدينا المصفوفة المربعة $A = \left[a_{ij}\right]$ ذات الأبعاد nn ، ولنشكل المعادلة الجبرية $\det(A - \lambda I) = 0$ فنحصل على:

$$\begin{vmatrix}a_{11}-\lambda & a_{12} & \ldots\ldots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \ldots\ldots & a_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{n1} & \ldots & \ldots & a_{nn}-\lambda\end{vmatrix} = 0 \ldots\ldots (1)$$

تعريف:

تسمى هذه المعادلة (1) بـ: المعادلة المميزة للمصفوفة A ، وهي معادلة جبرية من الدرجة n بالنسبة لـ λ ، كما نسمي جذور هذه المعادلة بالقيم الذاتية للمصفوفة.

تعريف:

نسمي الأشعة $X=(x_1,x_2,.....,x_n)$ التي تحقق المعادلة المصفوفية $AX=\lambda X....(2)$ بالأشعة الذاتية للمصفوفة A ، ونكتب المعادلة (2) على الشكل التالي:

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & .... & = & \lambda x_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & .... & = & \lambda x_2 \\ & ... & & ... & = & ... \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & ... & = & \lambda x_n \end{matrix}$$

تعريف:

لتكن $n\in\mathbb{N}^*$, $A\in M_n(\mathbb{R})$ ، نسمي λ عدد حقيقي بقيمة ذاتية للمصفوفة A ، إذا وجد شعاع (يعني مصفوفة عمود)، $X\in M_{n1}(\mathbb{R})$ غير صفري ، حيث: $AX=\lambda X$ ، يسمى X الشعاع الذاتي لـ A ، مجموعة القيم الذاتية لـ A نطلق عليها اسم الطيف(spectrum) لـ A ، ونرمز له له بـ : $spec(A)$.

ملاحظة: مصطلح الطيف في الأوساط العلوم الفيزيائية، على سبيل المثال: طيف الضوء، وهناك ارتباط في مفهوم طيف المصفوفة و طيف الفيزياء.

سنربط كل مصفوفة مربعة بما يسمى بكثير حدودها المميز، وهذا هو الذي يسمح لنا بتحديد القيم الذاتية.

قضية5:

إذا كانت λ قيمة ذاتية لـ f ، المجموعة التالية: $E_{\lambda}=\{x\in E\ ;\ f(x)=\lambda x\}$ هي عبارة عن فضاء شعاعي جزئي لـ E، وهو مجموعة القيم الذاتية المرتبطة بالقيمة الذاتية λ، E_{λ} هو فضاء شعاعي جزئي المرافق بالقيمة الذاتية λ لـ f .

تعريف:

نقول عن المصفوفة A أنها قطرية إذا كانت مماثلة لمصفوفة قطرية، بعبارة أخرى، A قطرية إذا وفقط إذا وجدت مصفوفة قطرية D ومصفوفة انتقال P ، حيث: $D=P^{-1}AP$.

يمكننا القول بشكل غير مختلف عن تقطير تماثل داخلي f Endomorphism أو المصفوفة الخاصة به A ، ويكون هذا في القضية التالية:

1-13-1- كيفية تقطير مصفوفة:

لتكن $A\in M_n(\mathbb{R})$ ، لتقطير A نقوم بالبحث عن مصفوفة قطرية D ومصفوفة عكوسة P ، بحيث يكون $D=P^{-1}AP$ باتباع الخطوات التالية:

1- نحسب كثير الحدود $p(\lambda)$ ، ثم نحسب جذوره ، إذا كانت هذه الجذور من $\mathbb{R}$ فهي القيم الذاتية لـ A ونمر الثانية.
2- من أجل كل قيمة ذاتية نبحث عن الفضاء الجزئي الذاتي E_{λ} المرافق لها، يعني نحل الجملة $(A-\lambda I)X$، إذا وجدت على الأقل قيمة ذاتية λ درجة تضاعفها تختلف عن بعد E_{λ} فأن المصفوفة غير قابلة للتقطير.

3- إذا كانت درجة تضاعف كل قيمة ذاتية λ تساوي بعد E_λ فالمصفوفة قابلة للتقطير.

4- نقوم بكتابة المصفوفة D بوضع القيم الذاتية على قطر هذه المصفوفة مع تكرير كل قيمة ذاتية حسب درجة تضاعفها.

5- نقوم بكتابة مصفوفة العبور (الانتقال) P، بحيث تكون أعمدتها من الأشعة الذاتية، مع مراعاة ترتيبها حسب ترتيب القيم الذاتية في المصفوفة D.

6- نقوم بحساب P^{-1} عند الحاجة إلى ذلك، وفي الأخير نجد:

$D = P^{-1}AP \Leftrightarrow A = PDP^{-1}$.

مثال15:

لتكن المصفوفة A حيث:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

لنحول A إلى مصفوفة قطرية D.

1) كثير الحدود المميز لـ A هو:

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 3 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\left(\lambda^2 - \lambda - 2\right)$$

$$\therefore P_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)\left(\lambda^2 - \lambda - 2\right) = 0$$

$$\therefore (\lambda = 1) \;,\; (\lambda = 2) \;,\; (\lambda = -1)$$

2) $\lambda_1 = 1 \;,\; \lambda_2 = 2 \;,\; \lambda_3 = -1$ هي قيم ذاتية بسيطة لـA ومنه A تقبل التأقطر.

3) البحث عن الفضاءات الشعاعية الجزئية الذاتية .

لتكن E_1 , E_2 , E_3 الفضاءات الشعاعية الجزئية الذاتية المرافقة للقيم الذاتية $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -1$ على التوالي.

$E_1(\lambda)$ هو حل للمعادلة $AX = X$ من خلال الجملة التالية:

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = x \\ -x + z = y \\ z = z \end{cases} \therefore \begin{cases} -2y + 3z = 0 \\ z = x + y \end{cases} \therefore \begin{cases} y = -3x \\ z = -2x \end{cases}$$

$$E_1(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -3x \\ -2x \end{pmatrix} , \ x \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} , \ x \in \mathbb{R} \right\} ; \ v_1 = (1,-3,-2)$$

$E_2(\lambda)$ هو حل للمعادلة $AX = 2X$ من خلال الجملة التالية:

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 2x \\ -x + z = 2y \\ z = 2z \end{cases} \therefore \begin{cases} x + 2y - 3z = 0 \\ z = x + 2y \end{cases} \therefore \begin{cases} x = -2y \\ z = 0 \end{cases}$$

$$E_2(A) = \left\{ \begin{pmatrix} -2y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} , \ y \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ y \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \ y \in \mathbb{R} \right\} ; \ v_2 = (-2,1,0)$$

$E_{-1}(\lambda)$ هو حل للمعادلة $AX = -X$ من خلال الجملة التالية:

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = -x \\ -x + z = -y \\ z = -z \end{cases} \therefore \begin{cases} 2x - 2y + 3z = 0 \\ z = x - y \end{cases} \therefore \begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases}$$

$$E_{-1}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \\ 0 \end{pmatrix} , \ x \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \ x \in \mathbb{R} \right\} ; \ v_3 = (1,1,0)$$

4) المصفوفة القطرية كما يلي:

$$D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

5) مصفوفة الانتقال ومقلوبها كما يلي:

$$P=\begin{pmatrix}1&-2&1\\-3&1&1\\-2&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow P^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&-\frac{5}{6}\end{pmatrix}$$

للتأكد من $D=P^{-1}AP$

$$C=A\cdot P=\begin{pmatrix}1&-2&3\\-1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-2&1\\-3&1&1\\-2&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-4&-1\\-3&2&-1\\-2&0&0\end{pmatrix}$$

$$D=P^{-1}\cdot C=\begin{pmatrix}0&0&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&-\frac{5}{6}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-4&-1\\-3&2&-1\\-2&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

1-14-رتبة جماعة الأشعة (رتبة مصفوفة):

1- رتبة جماعة الأشعة هي بعد الفضاء الشعاعي الجزئي المولد من هذه الجماعة، على سبيل المثال جماعة الأشعة المستقلة خطيا، رتبتها هي عدد الأشعة.

رتبة التطبيق الخطيf من E نحو F هو بعد صورته، والتي هي عبارة عن فضاء شعاعي جزئي لـ F ، مبرهنة الرتبة تربط البعد E ، بعد النواة لـ f و رتبة f.

2- رتبة المصفوفة هي رتبة التطبيق الخطي الذي تمثله، أو رتبة جماعة أعمدة الأشعة الخاصة بها.

3- رتبة جملة معادلات خطية، هي عدد المعادلات في أي جملة متدرجة مكافئة ، وهو يساوي رتبة مصفوفة معاملات الجملة.

تعريف:

تسمى رتبة جماعة S من الأشعة العدد الأقصى من الأشعة المستقل خطيا، الممكن استخراجه من ذلك.

مثال16: حدد ما إذا كانت الأشعة التالية مرتبطة خطيا أم لا ؟

$$w=(14,-8,2),v=(4,2,-2),\mathrm{u}=(2,-4,2)$$

حل المثال16:

طريقة 1: نشكل توليفة خطية بالنسبة للأشعة مساوية للشعاع المعدوم باستخدام السلميات $\mathrm{z,y,x}$.

$$\begin{cases}2x+4y+14z=0\\-4x+2y-8z=0\\2x-2y+2z=0\end{cases}\therefore\begin{cases}2x+4y+14z=0\\10y+20z=0\\6y+12z=0\end{cases}\therefore\begin{cases}2x+4y+14z=0\\4y+8z=0\end{cases}$$

إن المجموعة الواردة بالشكل المدرج مكونة من معادلتين غير صفريتين ذات ثلاثة مجاهيل، وبالتالي فللمجموعة حل غير صفري، لذا فالأشعة الأصلية مرتبطة خطيا.

طريقة 2: نكون المصفوفة التي أعمدتها إحداثيات الأشعة السابقة.

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 4 & 2 & -2 \\ 14 & -8 & 2 \end{pmatrix} \underset{\substack{2L_1 - L_2 \to L_2 \\ -7L_1 + L_3 \to L_3}}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 0 & -10 & 6 \\ 0 & 20 & -12 \end{pmatrix} \underset{2L_2 + L_3 \to L_3}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 0 & -10 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

وبمأن المصفوفة المدرجة تحتوي على صف صفري ، فأن الأشعة مرتبطة (الأشعة الثلاثة تولد فضاء بعده 2).

مثال17:

حدد رتبة المصفوفة التالية:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 & -4 & -6 \\ 2 & 8 & 6 & -2 & -8 \\ 4 & 6 & -8 & -14 & -6 \\ 6 & 16 & 2 & -14 & -16 \end{pmatrix}$$

حل المثال17:

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 & -4 & -6 \\ 2 & 8 & 6 & -2 & -8 \\ 4 & 6 & -8 & -14 & -6 \\ 6 & 16 & 2 & -14 & -16 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_1-L_2\to L_2 \\ 2L_1-L_3\to L_3 \\ 3L_1-L_4\to L_4}}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 & -4 & -6 \\ 0 & -2 & -4 & -2 & 2 \\ 0 & 6 & 12 & 6 & -6 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & -2 \end{pmatrix} \underset{\substack{3L_2+L_3\to L_3 \\ L_2+L_4\to L_4}}{}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 & -4 & -6 \\ 0 & -2 & -4 & -2 & -2 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

بمأن المصفوفة المدرجة تحتوي على صفين غير صفريين ، فأن

$rg(A) = rank(A) = 2$.

تطبيقات:

تطبيق1:

لتكن المصفوفات التالية:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \;,\; B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \;,\; C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 6 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

المطلوب: أوجد ما يلي:

1) $4A-2B \;,\; AC \;,\; 3\,{}^tB \;,\; 5\,{}^tA$

2) هل $AB \;,\; CA$ معرفتين ؟

3) أوجد $Tr(C)$.

حل التطبيق1:

1)

$$4A-2B=\begin{pmatrix}-12 & 16 & 8\\ 0 & 12 & 4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 2 & 4\\ 6 & 8 & 10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-12 & 14 & 4\\ -6 & 4 & -6\end{pmatrix}$$

$$A_{(2,3)}=\begin{pmatrix}-3 & 4 & 2\\ 0 & 3 & 1\end{pmatrix}\times C_{(3,3)}=\begin{pmatrix}3 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 6\\ -1 & 2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 1 & 21\\ 5 & 2 & 18\end{pmatrix}$$

$$3^tB=3\begin{pmatrix}0 & 3\\ 1 & 4\\ 2 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 9\\ 3 & 12\\ 6 & 15\end{pmatrix}\quad,\quad 5^tA=5\begin{pmatrix}-3 & 0\\ 4 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-15 & 0\\ 20 & 15\\ 10 & 5\end{pmatrix}$$

2) AB , CA ، غير معرفتين، لا يمكننا إجراء عملية الضرب لأن الدليلان المتجاوران غير متساويان: $C_{(3,3)}\times A_{(2,3)}\ (3\neq 2)$, $A_{(2,3)}\times B_{(2,3)}\ (3\neq 2)$.

3) $Tr(C)$ أثر المصفوفة (C) هو مجموع عناصر قطرها، ومنه:

$Tr(C)=(3+0+0)=3$.

تطبيق2:

أوجد محدد المصفوفة A بعدة طرق.

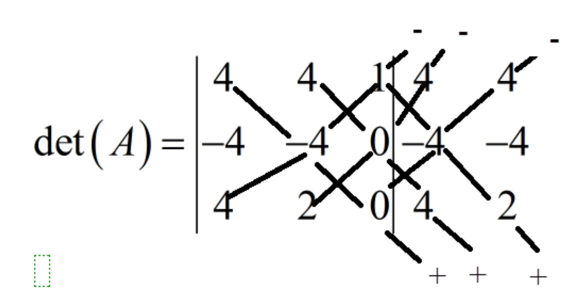
$$A=\begin{pmatrix}4 & 4 & 1\\ -4 & -4 & 0\\ 4 & 2 & 0\end{pmatrix}$$

حل التطبيق2:

طريقة 1:

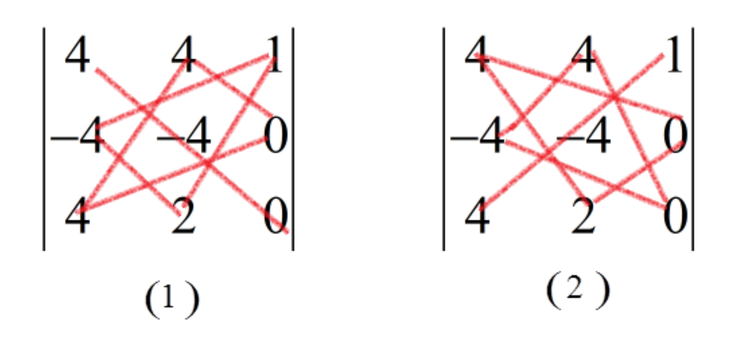
$$\det(A)=1\cdot\begin{vmatrix}-4 & -4\\ 4 & 2\end{vmatrix}-0\cdot\begin{vmatrix}4 & 4\\ 4 & 2\end{vmatrix}+0\cdot\begin{vmatrix}4 & 4\\ -4 & -4\end{vmatrix}=1\cdot\left(-8-(-16)\right)=8$$

طريقة 2: sarrus(1) :



$$\det(A)=\left(4(-4)(0)+4(0)(4)+1(-4)(2)\right)-\left(4(-4)(1)+2(0)(4)+0(-4)(4)\right)=8$$

طريقة 3: sarrus(2) :



$$(1):\left[\left(4(-4)(0)+4(0)(4)+1(-4)(2)\right)\right]=-8$$
$$(2):\left[4(-4)(1)+2(0)(4)+0(-4)(4)\right]=-16$$
$$\det(A)=(1)-(2)=-8-(-16)=8$$

تطبيق3:

أوجد محدد المصفوفة B :

$$B=\begin{pmatrix}1&0&2&0\\2&2&3&1\\3&1&4&0\\4&0&3&5\end{pmatrix}$$

حل التطبيق3:

أولا: وجب الانتباه للإشارات عند حسابنا للمحددات الجزئية :

$$\begin{pmatrix}+&-&+&-\\-&+&-&+\\+&-&+&-\\-&+&-&+\end{pmatrix}$$

$$\det(B)=1\cdot\begin{pmatrix}2&3&1\\1&4&0\\0&3&5\end{pmatrix}-0\cdot\begin{pmatrix}2&3&1\\3&4&0\\4&3&5\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}2&2&1\\3&1&0\\4&0&5\end{pmatrix}-0\cdot\begin{pmatrix}2&2&3\\3&1&4\\4&0&3\end{pmatrix}$$

ثانيا: المحددات من الرتبة الثالثة تحسب بالطريقة التي رأيناها في التمرين السابق.

$$\det(B)=1(28)-0+2(-24)-0=28-48=-20$$

ملاحظة:

كلما أزداد بعد المصفوفة كلما صعب حساب المحدد بالطرق التي تناولناها، وبالتالي نلجأ إلى إستخدام البرامج الرياضية ، كالمابل و الماتلاب و الماتيماتيكية، أو اللجوء

إلى استخدام خوارزميات جاهزة متاحة عبر الويب ، فقط عليك ادخال المصفوفة المراد حساب محددها والخوارزمية تتكفل بحساب ما تريده (محدد ، مقلوب ، منقول،...).

تطبيق4:

حل الجملة التالية بطريقتين:

1) كرامر . 2) غوص .

$$S=\begin{cases}10x+18y+4z=70\\8x+14y+12z=64\\2x+6y+16z=34\end{cases}$$

حل التطبيق4:

1) **طريقة كرامر:** نلاحظ أن الجملة من الشكل :. $AX=B$

$$\begin{pmatrix}10&18&4\\8&14&12\\2&6&16\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}70\\64\\34\end{pmatrix}$$

أولا: نحسب محدد الجملة:

$\Delta=\begin{vmatrix}10&18&4\\8&14&12\\2&6&16\end{vmatrix}=-272$ ، نلاحظ أن $\Delta=-272\neq 0$ فالجملة حل وحيد.

ثانيا: ايجاد المحددات D_z,D_y,D_x حيث تكون قيم المجاهيل كما يلي:

$$z=\frac{D_z}{\Delta}\ ,\ y=\frac{D_y}{\Delta}\ ,\ x=\frac{D_x}{\Delta}.$$

$$D_x=\begin{vmatrix}70&18&4\\64&14&12\\34&6&16\end{vmatrix}=-816\ ,\ x=\frac{D_x}{\Delta}=\frac{-816}{-272}=3$$

$$D_y=\begin{vmatrix}10&70&4\\8&64&12\\2&34&16\end{vmatrix}=-544\ ,\ y=\frac{D_y}{\Delta}=\frac{-544}{-272}=2$$

$$D_z=\begin{vmatrix}10&18&70\\8&14&64\\2&6&34\end{vmatrix}=-272\ ,\ z=\frac{D_z}{\Delta}=\frac{-272}{-272}=1$$

$$S=\{x=3\ ,\ \ y=2\ ,\ \ z=1\}$$

2) طريقة الحذف لغوص:

$$S=\begin{cases}10x+18y+4z=70\\8x+14y+12z=64\\2x+6y+16z=34\end{cases}\underset{\substack{-5L_3-L_1\to L_1\\-4L_3-L_2\to L_2}}{\therefore}\begin{cases}-12y-76z=-100\\-10y-52z=-72\\2x+6y+16z=34\end{cases}\underset{-\frac{10}{12}L_1+L_2\to L_2}{\therefore}\left\{\frac{136}{12}z=\frac{136}{12}\Rightarrow z=1\right.$$

$$10y=72-52=20\Rightarrow y=2\ \ ,\ \ 10x=70-36-4=30\Rightarrow x=3$$

أما التطبيق على Maple فهو كما يلي:

```
solve( { 10 x + 18 y + 4 z = 70 , 8 x + 14 y + 12 z = 64 , 2 x + 6 y + 16 z = 34 }, {x, y, z} );
                    {x = 3, y = 2, z = 1}
```

تطبيق5:

أحسب مقلوب المصفوفتين التاليتين:

$$A=\begin{pmatrix}2 & -5\\ 3 & 2\end{pmatrix} \quad , \quad B=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ -3 & 1 & 1\\ -2 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

حل التطبيق5:

$$A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\,{}^{t}com(A)$$

$$\det(A)=(2\cdot 2)-(3(-5))=19$$

$${}^{t}com(A)=\begin{pmatrix}2 & 5\\ -3 & 2\end{pmatrix} \quad , \quad A^{-1}=\frac{1}{19}\begin{pmatrix}2 & 5\\ -3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{19} & \frac{5}{19}\\ -\frac{3}{19} & \frac{2}{19}\end{pmatrix}$$

$$B^{-1}=\frac{1}{\det(B)}\,{}^{t}com(B) \quad , \quad \det(B)=6$$

$${}^{t}com(B)=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 0 & 0\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}-3 & 1\\ -2 & 0\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 1\\ -2 & 0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 1\\ -3 & 1\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}-3 & 1\\ -2 & 0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & -2\\ -2 & 0\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & -2\\ -3 & 1\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & -3\\ -2 & 2 & -4\\ 2 & 4 & -5\end{pmatrix}$$

$$B^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}0 & 0 & -3\\ -2 & 2 & -4\\ 2 & 4 & -5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{5}{6}\end{pmatrix}$$

أما التطبيق على Maple فهو كما يلي:

$with(LinearAlgebra)$:

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$Determinant(A)$;

$$19$$

$MatrixInverse(A)$;

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{19} & -\frac{5}{19} \\ \frac{3}{19} & \frac{2}{19} \end{bmatrix}$$

$$B := \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B := \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$MatrixInverse(B)$;

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{5}{6} \end{bmatrix}$$

تطبيق6:

باستخدام مقلوب المصفوفة قم بحل الجملة المعطاة في التمرين4 .

حل التطبيق6:

$$S = \begin{cases} 10x + 18y + 4z = 70 \\ 8x + 14y + 12z = 64 \\ 2x + 6y + 16z = 34 \end{cases}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 10 & 18 & 4 \\ 8 & 14 & 12 \\ 2 & 6 & 16 \end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X}=\underbrace{\begin{pmatrix} 70 \\ 64 \\ 34 \end{pmatrix}}_{B}$$

إذن الجملة من الشكل: $AX=B$

$$AX=B \quad \therefore \quad A^{-1}AX = A^{-1}B$$

ونعلم أن $A^{-1}A=I$ ، إذن: $X = A^{-1}B$

$$A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\,{}^{t}com(A)=\begin{pmatrix} -\frac{19}{34} & \frac{33}{34} & -\frac{10}{17} \\ \frac{13}{34} & -\frac{19}{34} & \frac{11}{34} \\ -\frac{5}{68} & \frac{3}{34} & \frac{1}{68} \end{pmatrix}$$

$$X=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{19}{34} & \frac{33}{34} & -\frac{10}{17} \\ \frac{13}{34} & -\frac{19}{34} & \frac{11}{34} \\ -\frac{5}{68} & \frac{3}{34} & \frac{1}{68} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 70 \\ 64 \\ 34 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x=-\frac{19}{34}(70)+\frac{33}{34}(64)-\frac{10}{17}(34)=23-20=3$$

$$S=\{x=3\ ,\ \ y=2\ ,\ \ z=1\}$$

الأعلام المذكورة في الفصل الأول:



يوهان كارل فريدريش غوص
Johann Carl Friedrich Gauss
(1855 -1777)



بيير فريدريك ساروس
Pierre Frédéric Sarrus
(1861 -1798)



غابرييل كرامر
Gabriel Cramer
(1752 - 1704)

الفصل الثاني: مدخل إلى البرمجة الخطية:

تمهيد:

الأمْثَلة Optimization هي أسلوب الحياة، لدينا موارد ووقتا محددا ونريد تحقيق أقصى استفادة منها بشكل صحيح وذلك لحل مشكلة ما كسلسلة التوريد مثلا ، إذن العديد من المشاكل التي تواجهها الشركات تستخدم التحسين (الأمْثَلة)، إنه موضوع مثير للاهتمام وملائم بشكل خاص في علم البيانات.

البرمجة الخطية Linear Programming (LP) وتسمى أيضا التحسين الخطي ، ظهرت في عام 1947 من طرف جورج دانتزيغ[1] George Bernard Dantzig ، وهي طريقة لتحقيق أفضل نتيجة (مثل أقصى ربح أو أقل تكلفة) في نموذج رياضي يتم تمثيل متطلباته من خلال العلاقات الخطية، البرمجة الخطية هي حالة خاصة من البرمجة الرياضية ، وهي تقنية لتحسين دالة الهدف الخطية تخضع للمساواة الخطية وقيود عدم المساواة الخطية.

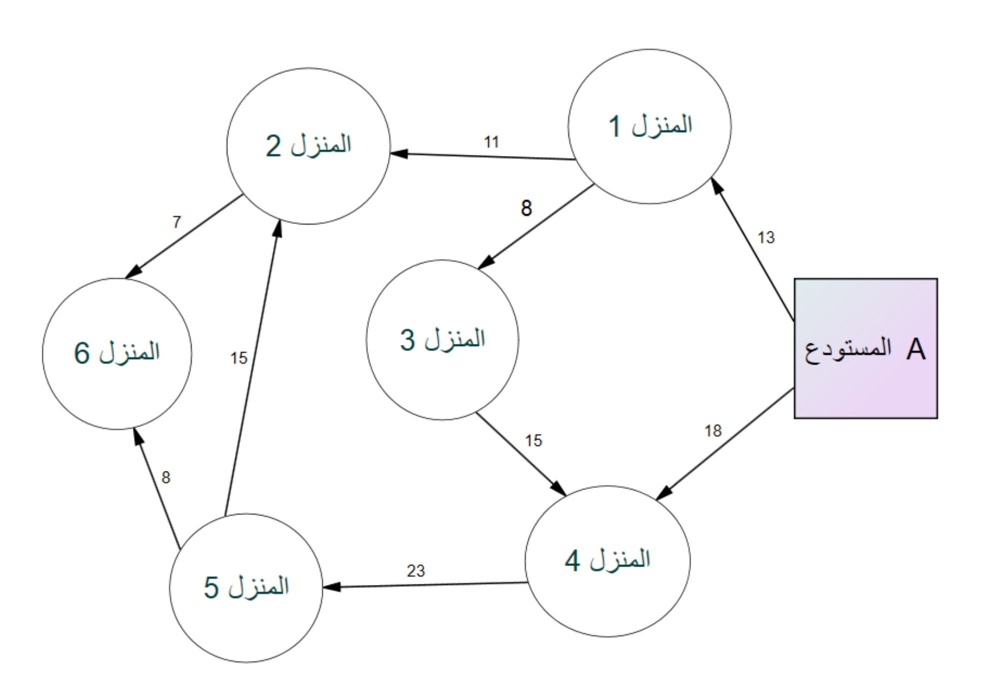
2-1- ماهية البرمجة الخطية؟

في هذه الفقرات نوضح مفهوم البرمجة الخطية ونحدد المصطلحات المهمة المستخدمة فيها، لكن قبل هذا نأخذ المثال التالي:

[1] - **جورج برنارد دانتزيغ George Bernard Dantzig 1914 - 2005** ، رياضياتي أمريكي قدم مساهمات في الهندسة الصناعية ، وبحوث العمليات ، وعلوم الكمبيوتر ، والاقتصاد ، والإحصاء، يشتهر Dantzig بتطويره لخوارزمية Simplex لحل مسائل البرمجة الخطية ، وعمله الأخر في الإحصاء ، حل Dantzig مسألتين مفتوحتين في النظرية الإحصائية (الحادثة الشهيرة التي أعتقد أن المسألتين عبارة عن واجب منزلي بعد وصوله متأخرا إلى محاضرة أستاذه **Jerzy Neyman**)

مثال1 :

لنفترض أن عامل توصيل يعمل لشركة " س" لديه 6 طرود يود تسليمها في يوم واحد، يقع المستودع عند النقطة A ، يتم تحديد وجهات التسليم الستة بواسطة المنزل 1 الى غاية المنزل 6 ، تشير الأرقام الموجودة في الخطوط إلى المسافة (كلم) بين المنازل لتوفير الوقود والوقت ، يريد هذا الشخص التوصيل بشرط أن يسلك أقصر طريق.



لذلك فأن هذا العامل سيقوم بحساب الطرق المختلفة للذهاب إلى جميع الوجهات الست، ثم يأتي بأقصر طريق، التقنية التي تساهم في اختيار أقصر طريق تسمى البرمجة الخطية.

في هذه الحالة، يكون هدف الشخص الذي يقوم بالتوصيل هو تسليم الطرد في الوقت المحدد في جميع الوجهات الست ، تسمى عملية اختيار أفضل طريق بحث العمليات.

بحوث العمليات هي نهج لصنع القرار ، والذي يتضمن مجموعة من الأساليب لتشغيل نظام ما، كما بينا في المثال أعلاه .

تستخدم البرمجة الخطية للحصول على الحل الأمثل لمسألة ذات قيود معينة، في البرمجة الخطية نقوم بصياغة مسألة في حياتنا الواقعية في نموذج رياضي، إنها تتضمن دالة الهدف والتي تخضع لقيود معينة.

صياغة مسألة: (صناعة الكعك)

مثال2:

صانع حلويات ينتج نوعين من الكعك A و B، كلاهما يتطلب الحليب و بودرة الشكولاتة ، لتصنيع كل وحدة من A و B نستعمل الكميات التالية:

تتطلب كل وحدة كعك من A : 3 وحدات من الحليب و 9 وحدات من بودرة الشكولاتة.

تتطلب كل وحدة كعك من B : 3 وحدات من الحليب و 6 وحدات من بودرة الشكولاتة.

لدى هذا الصانع في مخزنه 15 وحدة من الحليب و 36 وحدة من بودرة الشكولاتة ، وفي كل عملية بيع ، يحقق هذا الصانع ربحا قدره:

18 دينار لكل وحدة من A و 15 دينار لكل وحدة من B.

يرغب هذا الصانع في زيادة أرباحه، كم عدد الوحدات من A و B التي يجب أن ينتجها على التوالي؟

حل المثال2:

نقوم بتمثيل المسألة في شكل جدول لتسهيل الفهم:

	الحليب	بودرة الشكولاتة	الربح/ لكل وحدة
A	3	9	18
B	3	6	15
الكمية المتاحة	15	36	

نرمز للكمية المنتجة A بـ x ، و y للكمية المنتجة B ، يتم تمثيل إجمالي الربح بواسطة Z ، يتم إعطاء إجمالي الربح الذي يحققه هذا الصانع من خلال العدد الإجمالي لوحدات A و B المنتجة مضروبا في ربحها لكل وحدة بقيمة 18 دينار و15 دينار على التوالي.

الربح : $Max\ Z = 18X + 15Y$

مما يعني أنه يتعين علينا تعظيم Z

سيحاول هذا الصانع إنتاج العديد من الوحدات A و B لتعظيم الربح، لكن موارد الحليب و بودرة الشكولاتة متوفرة بكمية محدودة.

وفقا للجدول أعلاه، تتطلب كل وحدة من A و B 3 وحدات من الحليب، الكمية الإجمالية من الحليب المتوفر هي 15 وحدات، لتمثيل هذا رياضيا: $3X + 3Y \leq 15$

كذلك تتطلب كل وحدة من A و B : 9 وحدات و 6 وحدات من الشكولاتة على التوالي، الكمية الإجمالية من الشكولاتة المتوفرة هي 36 وحدة ، التمثيل الرياضي يكون كالتالي: $9X + 6Y \leq 36$

لدينا قيدان : $X \geq 0 \ , \ Y \geq 0$

لكي يحقق هذا الصانع أقصى ربح ، يجب تحقيق المتباينات المذكورة أعلاه، وهذا ما يسمى بصياغة مسألة في الواقع بنموذج رياضي.

2-2- مفاهيم أساسية في البرمجة الخطية:

2-2-1- متغيرات القرار: متغيرات القرار هي المتغيرات التي ستقرر المخرجات، إنها تمثل الحل النهائي لأي مسألة ، نحتاج أولا إلى تحديد هذه المتغيرات، بالنسبة للمثال أعلاه، فإن العدد الإجمالي لوحدات A و B المشار إليها بواسطة X و Y على التوالي هي متغيرات قرار.

2-2-2- دالة الهدف: يتم تعريفها على أنها الهدف من اتخاذ القرارات، في المثال أعلاه يرغب الصانع في زيادة إجمالي الربح الذي يمثله Z، لذا فإن الربح هو **دالة الهدف**.

2-2-3- القيود: عادة ما تحد من قيمة متغيرات القرار، في المثال أعلاه ، القيود المفروضة على توافر موارد الحليب و الشكولاتة هي قيود.

2-2-4- عدم السالبية: بالنسبة لجميع البرامج الخطية ، يجب أن تأخذ متغيرات القرار دائما قيما غير سالبة، هذا يعني أن قيم متغيرات القرار يجب أن تكون أكبر من أو تساوي صفر.

فخطوات تحديد مسألة في البرمجة الخطية بشكل عام تكون على النحو الاتي:

1- تحديد متغيرات القرار.
2- كتابة دالة الهدف.
3- وضع القيود.
4- شرط عدم السالبية.

لكي تكون المسألة برمجة خطية، يجب أن تكون متغيرات القرار ودالة الهدف والقيود جميعها دوال خطية.

2-3- الشكل القانوني و المعياري لبرنامج خطي:

تكون المسألة الخطية في الشكل المعياري إذا كانت جميع القيود عبارة عن قيود مساواة، لتحويل قيد عدم المساواة إلى قيد المساواة ، يجب أن نضيف إلى طرف القيد الأيسر كمية (مقدار) يسمى متغير الفجوة والذي يعمل على امتصاص الفجوة بين الطرف الأيسر والطرف الأيمن من قيد إذا كان الانحراف موجودا بالطبع ، وإلا فإن هذا المتغير يساوي صفرا.

تكون الصيغة الرياضية للشكل القانوني والمعياري لنموذج التدنية *Min* كما يلي:

$$\begin{array}{ll} Min\ CX & Min\ CX \\ AX \geq b & AX = b \\ X \geq 0 & X \geq 0 \end{array}$$

أما الصيغة الرياضية للشكل القانوني والمعياري لنموذج التعظيم *Max* كما يلي:

$$\begin{array}{ll} Max\ CX & Max\ CX \\ AX \leq b & AX = b \\ X \geq 0 & X \geq 0 \end{array}$$

حيث:

X: شعاع عمودي $(n\times1)$ يمثل عناصر متغيرات القرار.

b: شعاع عمودي $(m\times1)$ يمثل عناصر الطرف الأيمن لقيود النموذج.

C: شعاع أفقي $(1\times n)$ يمثل عناصر معاملات متغيرات القرار في دالة الهدف.

A : مصفوفة كيفية $(m\times n)$.

ملاحظة 1: نستطيع استخدام العلاقة التالية:

minimum f(x) = −maximum [−f(x)]

مثال3:

ضع النموذج التالي على الشكل المصفوفي:

$$\begin{aligned}&Max\ f = 5x+10y+14z\\&2x+7y-10z\le 5\\&6x+11y+z\le 50\\&x+5y+4z\ge 200\\&x,y,z\ge 0\end{aligned}$$

حل المثال3:

$$X_{(3,1)}=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix},\ A_{(3,3)}=\begin{bmatrix}2&7&-10\\6&11&1\\1&5&4\end{bmatrix},\ b_{(3,1)}=\begin{bmatrix}5\\50\\200\end{bmatrix},$$
$$C_{(1,3)}=\begin{bmatrix}5&10&14\end{bmatrix}$$

2-4- طرق الحل:

يمكن حل البرنامج الخطي بعدة طرق متعددة، سنتطرق إلى طريقتين:

1- الطريقة البيانية.
2- الطريقة المبسطة Simplexe.

2-4-1- الطريقة البيانية:

تستخدم هذه الطريقة فقط إذا كان عدد المتغيرات في النموذج متغيرين فقط، خوارزمية هذه الطريقة نلخصها فيما يلي:

1- صياغة المسألة.
2- تحويل القيود إلى مساواة ونرسم خطوط القيد.
3- تحديد منطقة الحل.

4- منطقة الحل المسموح به (الممكن) Feasible Region هي منطقة تقاطع حلول القيود (المنطقة المشتركة (عادة ما يتم تلوينها)) وتحدد رؤوس هذه المنطقة ، من بين هذه الرؤوس نستنتج النقطة المثلى التي تحقق لنا دالة الهدف.

5- الحل الأمثل يكون: عند أكبر قيمة للمتغير Z إذا كانت دالة الهدف دالة تعظيم (Max) ، و عند أقل قيمة للمتغير Z إذا كانت دالة الهدف دالة تدنية (Min).

6- في نفس المعلم نقوم برسم المستقيم (d) المحصل عليه عند وضع دالة الهدف في حالة التدنية Z=0 ، وعند تحريك هذا المستقيم نحو الأعلى فأن أول نقطة يصل إليها (d) تعتبر نقطة أمثلية.

مثال4:

بالرجوع إلى المثال أعلاه ، ماهي عدد الوحدات الواجب انتاجها من طرف هذا الصانع لكي يحقق أكبر ربح باستخدام الطريقة البيانية؟

حل المثال4:

1- صياغة النموذج

$$Max\ Z = 18X + 15Y$$
$$3X + 3Y \le 15$$
$$9X + 6Y \le 36$$
$$X \ge 0 \ , \ Y \ge 0$$

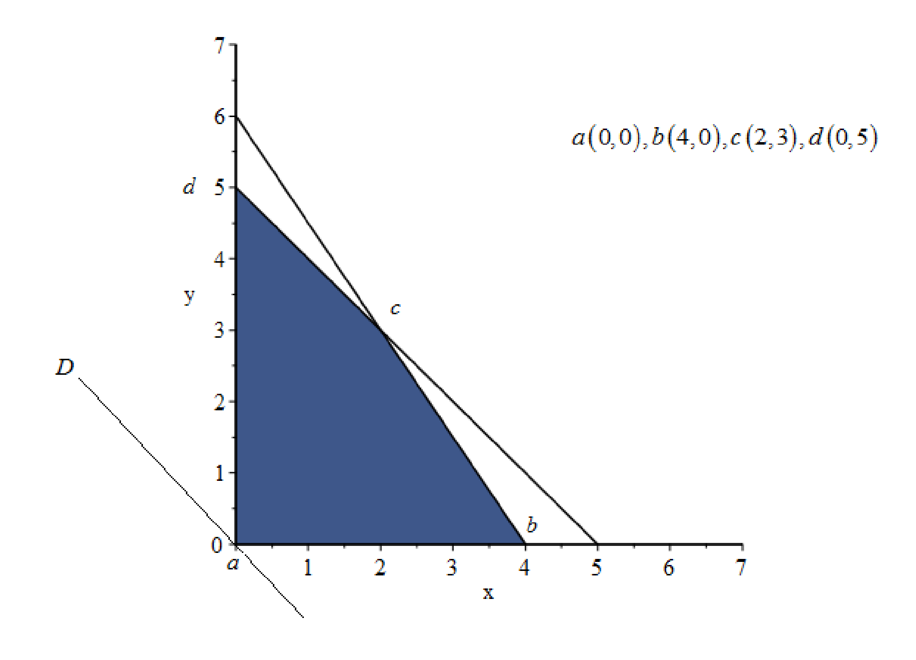
2- تحويل القيود إلى مساواة:

$$3X + 3Y = 15$$
$$9X + 6Y = 36$$

المستقيم D		المستقيم 2		المستقيم 1	
$Z = 18X + 15Y = 0$		$9X + 6Y = 36$		$3X + 3Y = 15$	
x	**y**	**x**	**y**	**x**	**y**
1	-6/5	0	6	0	5
-5/2	3	4	0	5	0

3- نقوم برسم النقاط على المعلم وتحديد نقاط التقاطع، نستخدم برنامج Maple في الرسم البياني:

```
with(plots) : cnsts := [3 x + 3 y ≤ 15, 9 x + 6 y ≤ 36, 0 ≤ x, 0 ≤ y] ;
feasibleRegion := inequal(cnsts, x = 0 ..7, y = 0 ..7, optionsexcluded = (colour = white)) : display(feasibleRegion)
cnsts := [3 x + 3 y ≤ 15, 9 x + 6 y ≤ 36, 0 ≤ x, 0 ≤ y]
```



نحاول إيجاد قيم x و y عند رؤوس المنطقة الملونة ونعوضها في دالة Z ، نوضح ذلك في الجدول التالي:

النقطة	X	Y	$Z = 18X + 15Y$
a	0	0	0
b	4	0	72
c	**2**	**3**	**81**
d	0	5	75

لإيجاد احداثيات النقطة c نقوم بحل جملة المعادلة :

$$\begin{cases} 3X + 3Y = 15 \\ 9X + 6Y = 36 \end{cases}$$

بعد الحل، نجد: x=2 و y=3.

يكون الحل الأمثل عند أكبر قيمة للمتغير Z ، لأن الدالة هي دالة تعظيم ، فالحل هو:

$$(X = 2 \ , \ Y = 3 \ , \ Z = 81)$$

يكون الحل بيانيا في أحد الرؤوس b ، c ، d ، غير أنه عند تحريك المستقيم D إلى أعلى نجد أن أول رأس يصل إليه في منطقة الحل المقبول هو في النقطة c .

مثال5:

استخدم الطريقة البيانية في حل مسألة التعظيم التالية:

$$Max\ Z = 6X + 3Y$$
$$3X + 6Y \le 30$$
$$3X + 3Y \le 18$$
$$3X - 3Y \le 6$$
$$3X - 6Y \le 3$$
$$X \ge 0 \ , \ Y \ge 0$$

حل المثال5:

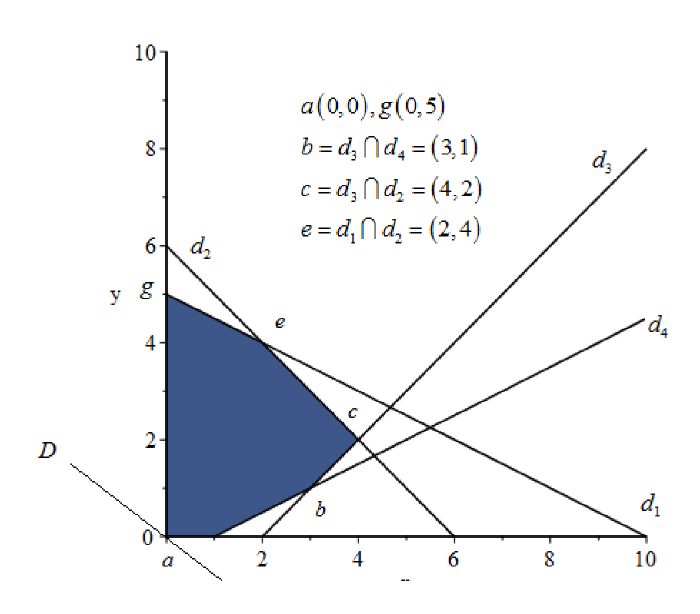
1- تحويل القيود إلى مساواة:

$$3X + 6Y = 30$$
$$3X + 3Y = 18$$
$$3X - 3Y = 6$$
$$3X - 6Y = 3$$

المستقيم 1		المستقيم 2		المستقيم 3		المستقيم 4		المستقيم D	
$3X + 6Y = 30$		$3X + 3Y = 18$		$3X - 3Y = 6$		$3X - 6Y = 3$		$Z = 6X + 3Y = 0$	
x	y	x	y	x	y	x	y	x	y
0	5	0	6	0	-2	0	-0.5	2	-4
10	0	6	0	2	0	1	0	1	-2

2- نقوم برسم النقاط على المعلم وتحديد نقاط التقاطع، نستخدم برنامج Maple في الرسم البياني:

```
with(plots) : cnsts := [3 x + 6 y ≤ 30, 3 x + 3 y ≤ 18, 3 x - 3 y ≤ 6,  3 x − 6 y ≤ 3, 0 ≤ x, 0 ≤ y] ;
feasibleRegion := inequal(cnsts, x = 0 ..10, y = 0 ..10, optionsexcluded = (colour = white)) : display(feasibleRegion)
        cnsts := [3 x + 6 y ≤ 30, 3 x + 3 y ≤ 18, 3 x − 3 y ≤ 6, 3 x − 6 y ≤ 3, 0 ≤ x, 0 ≤ y]
```



نحاول إيجاد قيم x و y عند رؤوس المنطقة الملونة ونعوضها في دالة Z ، نوضح ذلك في الجدول التالي:

$Max\ Z = 6X + 3Y$	Y	X	النقطة
0	0	0	a
21	1	3	b
30	**2**	**4**	**c**
15	5	0	g
24	4	2	e

نلاحظ أن النقطة x=4 و y=2 ، تحقق أكبر قيمة للمتغير Z ، لأن الدالة هي دالة تعظيم ، فالحل هو:

$$(X = 4 \ , \ Y = 2 \ , \ Z = 30)$$

يكون الحل بيانيا في أحد الرؤوس b ، c ، e ، g ،غير أنه عند تحريك المستقيم D إلى أعلى نجد أن أول رأس يصل إليه في منطقة الحل المقبول هو في النقطة c .

مثال 6:

رياضي ما يتبع نظام غذائي منخفض الكوليسترول، أثناء وجبة الغداء يختار دائما بين وجبتين : وجبة 1 أو وجبة 2 ، يبين الجدول أدناه كمية البروتينات والكربوهيدرات والفيتامينات التي توفرها كل وجبة جنبا إلى جنب مع كمية الكوليسترول التي يحاول تقليلها، يحتاج هذا الرياضي إلى 400 غرام على الأقل من البروتين ، و 1920 غراما من الكربوهيدرات ، و 80 غراما من الفيتامينات لتناول طعام الغداء كل شهر، خلال هذه الفترة الزمنية كم عدد الأيام التي يجب أن يتناول فيها وجبة 1 ، وكم عدد أيام تناول وجبة 2 حتى يحصل على الكمية الكافية من البروتين والكربوهيدرات والفيتامينات وفي نفس الوقت يقلل من تناول الكوليسترول؟

	وجبة 1	وجبة 2
بروتين	16 غرام	32 غرام
كربوهيدرات	120 غرام	80 غرام
فيتامين C	4 غرام	4 غرام
كوليسترول	120 ميغا غرام	100 ميغا غرام

حل المثال 6:

ليكن X هو عدد الأيام التي يتناول فيها هذا الرياضي وجبة 1 ، و Y عدد الأيام التي يتناول فيها وجبة 2 ، نظرا لأنه يحاول تقليل الكوليسترول فأن دالة الهدف تمثل إجمالي كمية الكولسترول التي توفرها كلتا الوجبتين، أي: $120X + 100Y = C$

1- صياغة مسألة التدنية التالية:

$$\begin{aligned}
&Min\ Z = 120X + 100Y \\
&16X + 32Y \geq 400 \\
&120X + 80Y \geq 1920 \\
&4X + 4Y \geq 80 \\
&X \geq 0 \ , \ Y \geq 0
\end{aligned}$$

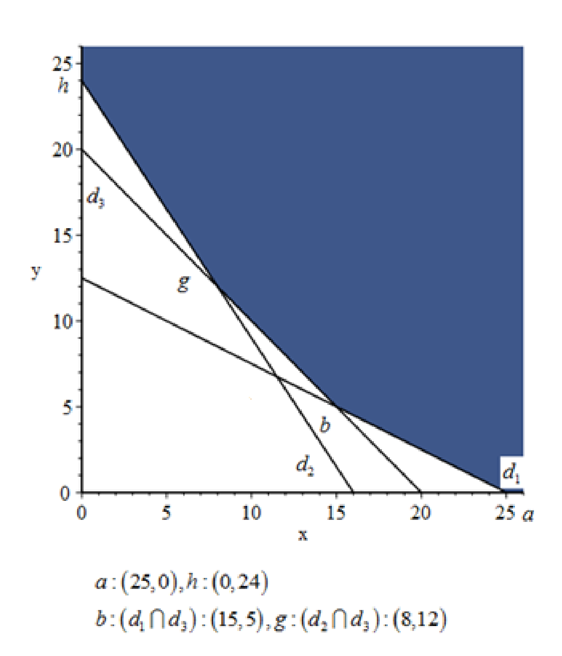
2- تحويل القيود إلى مساواة:

$$\begin{aligned}
&16X + 32Y = 400 \\
&120X + 80Y = 1920 \\
&4X + 4Y = 80
\end{aligned}$$

المستقيم 3		المستقيم 2		المستقيم 1	
$4X + 4Y = 80$		$120X + 80Y = 1920$		$16X + 32Y = 400$	
x	**y**	**x**	**y**	**x**	**y**
0	20	0	24	0	12.5
20	0	16	0	25	0

3- نقوم برسم النقاط على المعلم وتحديد نقاط التقاطع، نستخدم برنامج Maple في الرسم البياني:

```
with(plots) : cnsts := [16 x + 32 y ≥ 400, 120 x + 80 y ≥ 1920, 4 x + 4 y ≥ 80, 0 ≤ x, 0 ≤ y] ;
feasibleRegion := inequal(cnsts, x = 0 ..26, y = 0 ..26, optionsexcluded = (colour = white)) : display(feasibleRegion)
cnsts := [400 ≤ 16 x + 32 y, 1920 ≤ 120 x + 80 y, 80 ≤ 4 x + 4 y, 0 ≤ x, 0 ≤ y]
```



نحاول إيجاد قيم x و y عند رؤوس المنطقة الملونة ونعوضها في دالة Z ، نوضح ذلك في الجدول التالي:

$Min\ Z = 120X + 100Y$	Y	X	النقطة
3000	0	25	a
2300	5	15	b
2160	**12**	**8**	**g**
2400	24	0	h

نلاحظ أن النقطة x=8 و y=12 ، تحقق أقل قيمة للمتغير Z ، لأن الدالة هي دالة تدنية ، فالحل هو:

$$(X = 8\ ,\ Y = 12\ ,\ Z = 2160)$$

النقطة g(8 ، 12) تعطي أقل نسبة كوليسترول وهي 2160 ميغا غرام، معنى هذا أنه لكل 20 وجبة ، يجب على هذا الرياضي تناول وجبة 1 لمدة 8 أيام ووجبة 2 لمدة 12 يوما.

مثال 7:

استخدم الطريقة البيانية في حل مسألة التدنية التالية:

$$\begin{aligned} &Min\ Z = 9X + 6Y \\ &15X + 3Y \geq 30 \\ &3X + 3Y \geq 18 \\ &3X + 12Y \geq 36 \\ &X \geq 0\ ,\ Y \geq 0 \end{aligned}$$

حل المثال 7:

1- تحويل القيود إلى مساواة:

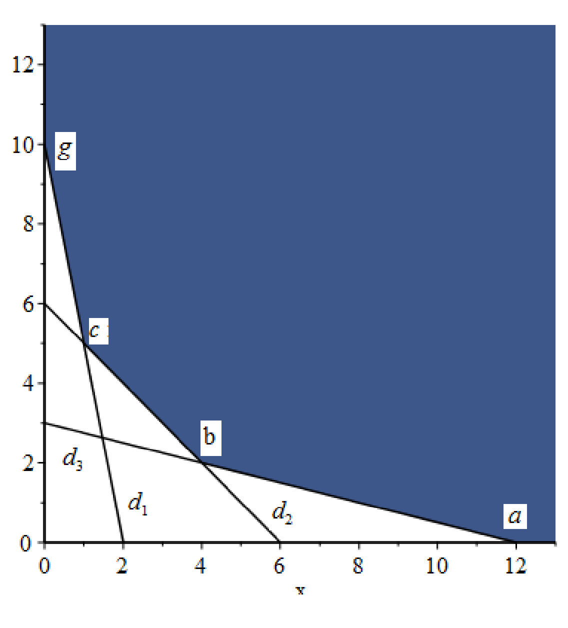
$$\begin{aligned} &15X + 3Y = 30 \\ &3X + 3Y = 18 \\ &3X + 12Y = 36 \end{aligned}$$

المستقيم 3		المستقيم 2		المستقيم 1	
$3X + 12Y = 36$		$3X + 3Y = 18$		$15X + 3Y = 30$	
x	y	x	y	x	y
0	3	0	6	0	10
12	0	6	0	2	0

2- نقوم برسم النقاط على المعلم وتحديد نقاط التقاطع، نستخدم برنامج Maple في الرسم البياني:

$with(plots) : cnsts := [15x + 3y \geq 30, 3x + 3y \geq 18, 3x + 12y \geq 36, 0 \leq x, 0 \leq y]$;
$feasibleRegion := inequal(cnsts, x = 0..13, y = 0..13, optionsexcluded = (colour = white)) : display(feasibleRegion)$

$$cnsts := [30 \leq 15x + 3y, 18 \leq 3x + 3y, 36 \leq 3x + 12y, 0 \leq x, 0 \leq y]$$



$$a : (12,0); b : (d_3 \cap d_2) = (4,2)$$
$$g : (0,10); c : (d_1 \cap d_2) = (1,5)$$

نحاول إيجاد قيم x و y عند رؤوس المنطقة الملونة ونعوضها في دالة Z ، نوضح ذلك في الجدول التالي:

$Min\ Z = 9X + 6Y$	Y	X	النقطة
72	0	12	a
48	2	4	b
39	**5**	**1**	**c**
60	10	0	g

نلاحظ أن النقطة x=1 و y=5 ، تحقق أقل قيمة للمتغير Z ، لأن الدالة هي دالة تدنية ، فالحل هو:

$$(X=1 \ , \ Y=5 \ , \ Z=39)$$

2-4-1- 1- طريقة دالة خط الربح /التكلفة:

قبل الخوض في شرح هذه الطريقة وجب ذكر النظرية الأساسية للبرمجة الخطية والتي تنص على ما يلي:

إن وجد حل أمثل لمسألة برمجة خطية، فهو يقع على الحدود (أي المستقيمات والرؤوس). علاوة على ذلك، إذا كان لدينا خط حدي يقع عليه الحل الأمثل، ووجد رأس أو أكثر، فسيقع الحل عند أحد هذه الرؤوس.

وفقا لطريقة دالة خط الربح /التكلفة ، يتم إيجاد الحل الأمثل باستخدام ميل خط دالة الهدف ، خط الربح (أو التكلفة) هو مجموعة من النقاط التي تعطي الحل بنفس القيمة من دالة الهدف من خلال تعيين قيم مختلفة لـ Z لنحصل على خطوط ربح (تكلفة) مختلفة، بيانيا يمكن رسم هذه الخطوط بالتوازي مع بعضها البعض و نصل إلى الحل الأمثل عندما يلامس خط الربح مع أعلى نقطة في منطقة الحلول الممكنة إذا كانت دالة الهدف تعظيم (Max)، وأدنى نقطة في منطقة الحلول الممكنة إذا كانت دالة الهدف تقليل (Min) ، فيما يلي خطوات طريقة دالة الربح (التكلفة):

الخطوة 1: تحديد منطقة الحل للنموذج والنقاط الحدية للمنطقة الممكنة.

الخطوة 2: نرسم خط الربح (خط التكلفة) لقيمة اختيارية ولكن صغيرة بالنسبة لدالة الهدف بدون اخلال من قيود مسألة البرمجة الخطية المقدمة، ومع ذلك من السهل اختيار القيمة التي تعطيها قيمة عدد صحيح لـ x عندما نضع $y = 0$ والعكس صحيح، الاختيار الجيد هو استخدام رقم مقسم بواسطة معاملات كلا المتغيرين ($\frac{x}{y}$ مثلا).

الخطوة 3: نقل خطوط الربح (خط التكلفة) الموازية في اتجاه (زيادة / تناقص) لدالة الهدف، قد يتقاطع خط الربح الأبعد عند نقطة زاوية واحدة فقط في المنطقة الممكنة والتي توفر حل واحد أمثل، أيضا قد يتطابق هذا الخط مع أحد خطوط

الحدود لمنطقة حلول النموذج ، إذا استمر خط الربح من دون حدود ثم يوجد حل غير محدود، يشير هذا عادة إلى حدوث خطأ في صياغة نموذج البرمجة الخطية.

الخطوة 4: تعتبر النقطة الحدية (الزاوية) التي يتلامس معها خط الربح (أو التكلفة) هي النقطة المثلى ، نقطة الحل تعطي إحداثيات هذه النقطة الحدية قيمة دالة الهدف.

مثال8:

استخدم طريقة دالة خط الربح (التكلفة) في حل مسألة التدنية التالية:

$$Min\ Z = 10X + 12Y$$
$$4X + 6Y \geq 48$$
$$6X + 2Y \geq 24$$
$$X \geq 0 \quad , \quad Y \geq 0$$

حل المثال8:

1- تحويل القيود إلى مساواة:

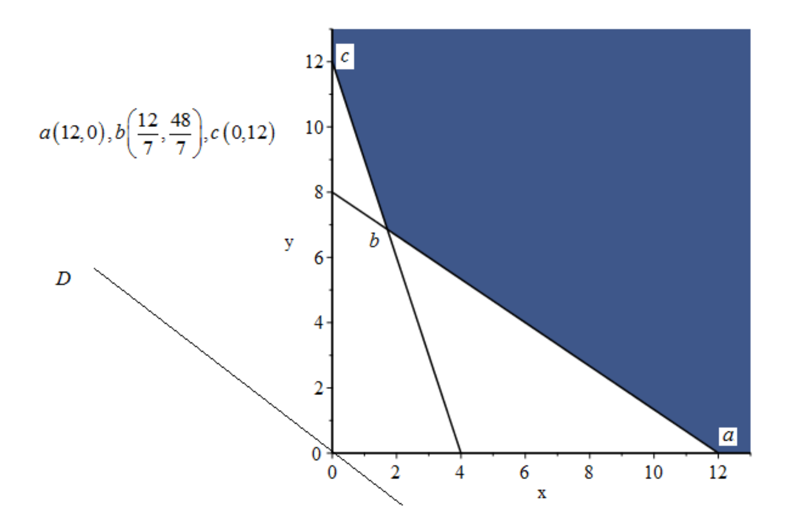
$$4X + 6Y = 48$$
$$6X + 2Y = 24$$

المستقيم 1		المستقيم 2	
$4X + 6Y = 48$		$6X + 2Y = 12$	
y	x	y	x
8	0	12	0
0	12	0	4

2- نقوم برسم النقاط على المعلم وتحديد نقاط التقاطع، نستخدم برنامج Maple في الرسم البياني:

$with(plots) : cnsts := [4x + 6y \geq 48, 6x + 2y \geq 24, 0 \leq x, 0 \leq y]$;
$feasibleRegion := inequal(cnsts, x = 0..13, y = 0..13, optionsexcluded = (colour = white)) : display(feasibleRegion)$

$cnsts := [48 \leq 4x + 6y, 24 \leq 6x + 2y, 0 \leq x, 0 \leq y]$



يكون الحل في أحد الرؤوس (a,b,c) ، غير أنه عند تحريك المستقيم D إلى أعلى نجد أن أول رأس يصل إلى منطقة الحل هو b فإحداثيات هذه النقطة $b\left(\frac{12}{7}, \frac{48}{7}\right)$ تحققان أدنى قيمة لدالة الهدف للمتغير Z ($Z = \frac{696}{7}$).

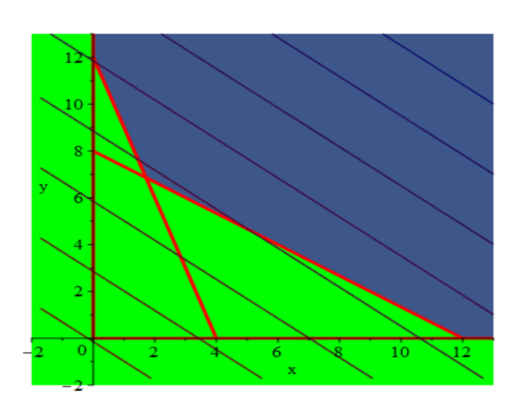
أما تطبيق هذا المثال على برنامج Maple فيكون على النحو الاتي:

$with(plots);$

$constraintsA := \{4x + 6y \geq 48, 6x + 2y \geq 24, x \geq 0, y \geq 0\};$

$constraintsA := \{0 \leq x, 0 \leq y, 24 \leq 6x + 2y, 48 \leq 4x + 6y\}$

$domainA := inequal\left(constraintsA, x = -2..13, y = -2..13, optionsclosed = (color = red, thickness = 3), optionsexcluded = (color = green), contourplot\left(10x + 12y, x = -\frac{12}{7}..13, y = -\frac{12}{7}..13, thickness = 1, contours = 8\right)\right) : \% ;$



2-4-1-2- حالات خاصة في البرمجة الخطية:

أولا: الحلول المثلى البديلة (أو المتعددة) Alternative (or Multiple) Optimal Solutions:

إن الحل الأمثل لأي مسألة في البرمجة الخطية يحدث عند النقطة الحدية في منطقة الحلول وأن الحل وحيد ، أي أنه لا يوجد حل أخر ينتج نفس قيمة دالة الهدف، ومع ذلك في بعض الحالات ، قد يكون لمسألة البرمجة الخطية أكثر من حل واحد يعطي نفس قيمة دالة الهدف الأمثل، يطلق على هذه الحلول المثلى اسم الحل الأمثل البديل.

هناك شرط يجب استيفاؤه لوجود حل بديل أمثل وهو:

يجب أن يكون ميل دالة الهدف هو نفسه واحد من القيود التي تشكل حدود منطقة الحل.

مثال9:

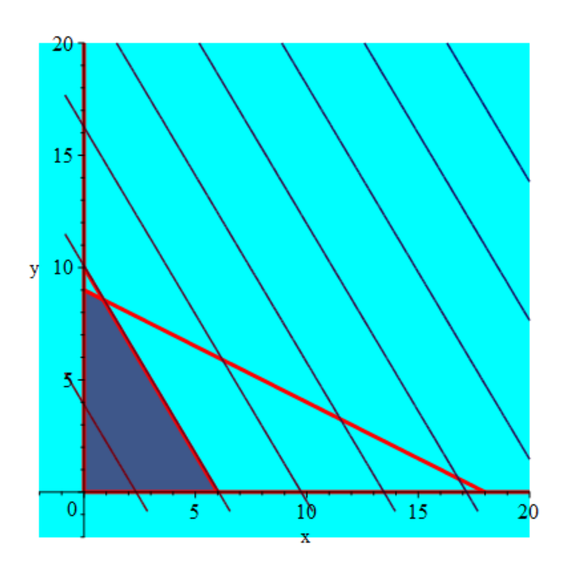
استخدم الطريقة البيانية في حل مسألة التعظيم التالية:

$$Max\ Z = 30X + 18Y$$
$$15X + 9Y \leq 90$$
$$3X + 6Y \leq 54$$
$$X \geq 0 \quad , \quad Y \geq 0$$

حل المثال9:

نستخدم برنامج Maple في التمثيل البياني التالي:

```
with(plots);
constraintsA := {15 x + 9 y ≤ 90, 3 x + 6 y ≤ 54, x ≥ 0, y ≥ 0};
                    constraintsA := {0 ≤ x, 0 ≤ y, 3 x + 6 y ≤ 54, 15 x + 9 y ≤ 90}
domainA := inequal(constraintsA, x = -2 ..20, y = -2 ..20, optionsclosed = (color = red, thickness = 3), optionsexcluded = (color
   = cyan), contourplot(30 x + 18 y, x = -6/7 ..20, y = -6/7 ..20, thickness = 1, contours = 8)) : % ;
```



ثانيا: حل غير محدود (مفتوح)Unbounded Solution :

في بعض الأحيان قد يكون لمسألة البرمجة الخطية حل لا نهائي (منطقة الحل الممكن مفتوحة)، يحدث ذلك عندما تكون قيمة متغيرات قرار معينة وقيمة دالة الهدف (حالة التعظيم) مسموح لها بالزيادة بلا حدود، دون الإخلال بشرط البرمجة الخطية.

بعض القيم المحددة لدالة الهدف بشكل عام، يوجد حل غير محدود لمسألة البرمجة الخطية بسبب صياغة غير صحيحة للمسائل الواقعية (مثلا: موارد المؤسسة في الواقع أنها محدودة تصاغ بالعكس أي غير محدودة).

مثال10:

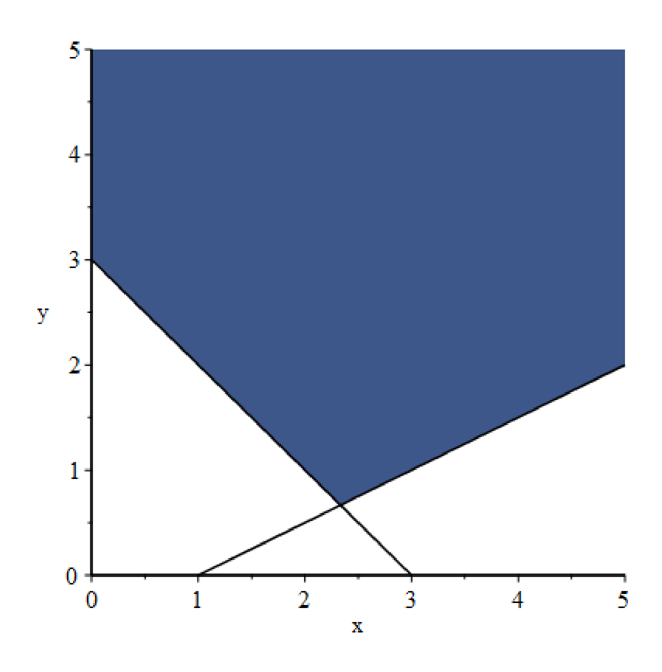
استخدم الطريقة البيانية في حل مسألة التعظيم التالية:

$$\begin{aligned} &Max\ Z = 10X + 8Y \\ &2X - 4Y \le 2 \\ &2X + 2Y \ge 6 \\ &X \ge 0 \ , \ Y \ge 0 \end{aligned}$$

حل المثال10:

نستخدم برنامج Maple في التمثيل البياني التالي:

```
with(plots) : cnsts := [2 x − 4 y ≤ 2 , 2 x + 2 y ≥ 6, 0 ≤ x, 0 ≤ y] ;
feasibleRegion := inequal(cnsts, x = 0 ..5, y = 0 ..5, optionsexcluded = (colour = white)) : display(feasibleRegion)
                    cnsts := [2 x − 4 y ≤ 2, 6 ≤ 2 x + 2 y, 0 ≤ x, 0 ≤ y]
```



ثالثا: حالة تعذر الحل Infeasible Solution:

لا تتقاطع منتطق حلول قيود النموذج (وجود قيود متعارضة)، وبالتالي لا تتوفر منطقة حل النموذج (أي لا يوجد حل للنموذج).

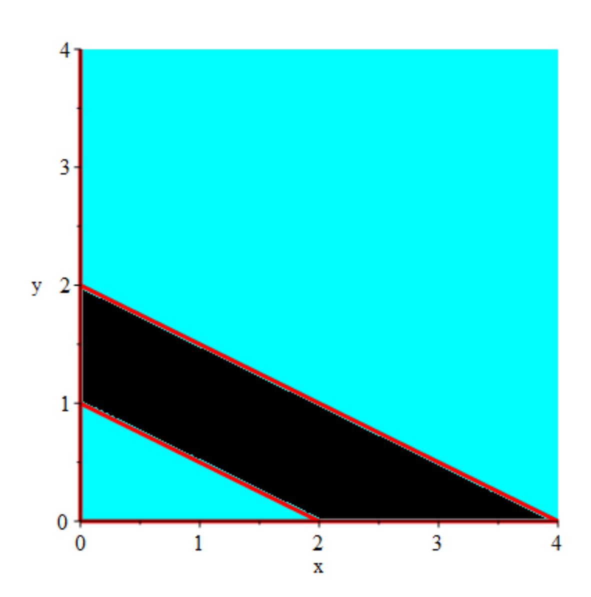
استخدم الطريقة البيانية في حل مسألة التعظيم التالية:

$$Max\ Z = 12X + 8Y$$
$$4X - 4Y \geq 1$$
$$4X + 4Y \geq 3$$
$$X \geq 0 \ , \ Y \geq 0$$

حل المثال11:

نستخدم برنامج Maple في التمثيل البياني التالي:

```
with(plots);
constraintsA := {8x + 16y ≤ 16, 16x + 32y ≥ 64, x ≥ 0, y ≥ 0};
                constraintsA := {0 ≤ x, 0 ≤ y, 64 ≤ 16x + 32y, 8x + 16y ≤ 16}
domainA := inequal(constraintsA, x = 0..4, y = 0..4, optionsclosed = (color = red, thickness = 3), optionsexcluded = (color = cyan)) :
  % ;
```



2-4-2- الطريقة المبسطة (السمبلكس) simplex:

تحتوي معظم المسائل المطروحة في التطبيقات العملية عند صياغتها كنموذج للبرمجة الخطية على أكثر من متغيرين ، وبالتالي فهي بحاجة إلى طريقة أكثر فعالية لاقتراح الحل الأمثل لهذه المسائل، في هذه الفقرات سنتطرق إلى طريقة مشهورة تدعى الطريقة المبسطة (السمبلكس simplex) ، تم تطويرها بواسطة G B Dantzig في سنة 1947.

يشبه مفهوم طريقة simplex الطريقة البيانية ، من خلال الطريقة البيانية يتم فحص النقاط الحدية من أجل البحث عن الحل الأمثل الذي يكمن في واحدة من هذه النقاط، أما بالنسبة للمسائل ذات المتغيرات المتعددة قد لا نتمكن من رسم منطقة الحلول ، لكن الحل الأمثل حتما يكمن في نقطة حدية من الشكل متعدد الجوانب والمتعدد الأبعاد (يسمى متعدد السطوح polyhedron ذو البعد n) الذي يمثل مساحة منطقة الحل .

تفحص طريقة simplex هذه النقاط الحدية بطريقة منهجية ، وتكرر نفس مجموعة خطوات الخوارزمية حتى الوصول للحل الأمثل ، ولهذا السبب تسمى أيضا هذه الطريقة بالطريقة التكرارية.

أما الاختلاف بين الطريقة البيانية والطريقة المبسطة نوضحه فيما يلي:

ذكرنا سابقا في تحديد الحل وفقل للطريقة البيانية بأنه يتم تحديد جميع نقاط الحلول الأساسية الممكنة (النقاط الحدية)، ثم حساب قيمة دالة الهدف عند كل نقطة حدية ممكنة واختيار أفضل حل، يعتبر هذا الاجراء غير كفأ ، لنتصور لو كان لدينا نموذج به عدد من المجاهيل (متغيرات القرار+ المتغيرات المكملة + الاصطناعية) يساوي n=10 وعدد القيود يساوي m=3 ، فأن عدد النقاط الحدية في هذه الحالة يحسب باستخدام التوليفات combinaisons هو $C_{10}^{3} = \frac{10!}{3!\cdot 7!} = 240$ أي أنه يجب فحص 240 نقطة حدية لتحديد الحل الأمثل، وهذه تعتبر طريقة غير كفأ عند مقارنتها بالطريقة المبسطة والتي تنقل نقطة حل أساسي ممكن إلى نقطة حل أساسي أفضل من سابقه نظرا لوجود شرط الأمثلية، مما يؤدي إلى عدم فحص جميع النقاط الحدية، ولهذا تكمن قدرة هذه الطريقة إلى الوصول إلى الحل الأمثل بسرعة.

نظرا لأن عدد النقاط الحدية لمساحة الحل المعطى محدود ، فإن الطريقة المبسطة تضمن وجود تحسين لقيمة دالة الهدف أثناء انتقالنا من تكرار واحد (نقطة حدية) إلى أخرى وتحقيق الحل الأمثل في عدد محدود من الخطوات، كما تشير أيضا إلى عدم وجود حدود.

2-4-2- 1- مفاهيم حول طريقة simplex:

أولا: المتغيرات الأساسية Basic variables:

هي المتغيرات التي لها معامل واحد في معادلات وصفر في معادلات أخرى.

ثانيا: المتغيرات غير الأساسية Non-Basic variables:

هي المتغيرات التي تأخذ معاملات بقيم مختلفة سواء كانت موجبة أو سالبة أو صفرا.

ثالثا: متغيرات وهمية(مكملة و فائض)، اصطناعية Slack, surplus, artificial variables :

أ) إذا كانت المتباينة (أقل من أو تساوي ≤)، فإننا نضيف متغيرا وهميا (مكملا) (+S).

ب) إذا كانت المتباينة (أكبر من أو تساوي ≥) ، فإننا نطرح متغيرا وهميا (فائضا) (− S) ونضيف متغيرا اصطناعيا.

ج) إذا كان لدينا (مساواة =) نضيف المتغيرات الاصطناعية.

2-4-2- 2- خطوات طريقة simplex:

يتطلب استخدام طريقة simplex لحل مسألة البرمجة الخطية تحويل المسألة إلى النموذج المعياري، نتبع بعض الخطوات نلخصها فيما يلي:

الخطوة 1: تحويل قيود المتباينات إلى قيود المساواة و إضافة أو طرح متغير وهمي إلى الطرف الأيسر حسب اتجاه المتباينة.

الخطوة 2: نختار المتغيرات الأصلية كمتغيرات غير أساسية والمتغيرات الوهمية كمتغيرات أساسية، وسيتم إجراء تبديل بين متغير غير أساسي من اختيارنا والذي سيكون استبداله بمتغير أساسي (داخل)، يعتمد اختيار متغير الإدخال على المتغير الأكبر معامل في دالة الهدف (طبعا بعد التحويل إلى الشكل المعياري).

الخطوة 3: إذا كانت دالة الهدف Min نقوم بتحويلها إلى دالة Max باستخدام العلاقة التالية: $Z^* = -Z \quad ; \quad MinZ = -MaxZ^*$.

الخطوة 4: نتفحص الطرف الأيمن $b_i\left(i=1,....,m\right)$ وجب أن تكون قيما موجبة، في حالة إن وجدت قيما سالبة نقوم بضرب الطرف في (-1).

2-4-2- 3- الشرط الأمثلي Optimality condition:

متغير الإدخال في مسألة (Min / Max) هو المتغير غير الأساسي الذي يحتوي على(أقل / أكبر) المعاملات في الصف $Z_j - C_j$.

يتم الوصول إلى المستوى الأمثل عند التكرار حيث يكون كل معامل الصف Z للمتغيرات غير الأساسية (غير سالب / غير موجب) حسب دالة الهدف.

2-4-2- 4- شروط الاتاحة (المعقولية) Feasibility condition :

لكل من مسائل التعظيم والتدنية ، يكون المتغير المتبقي هو الأساسي المرتبط بأصغر نسبة غير سالبة (مع مقام موجب تماما) أي حساب النسبة التالية:

$\frac{X_{Br}}{a_{rj}} = Min\left\{\frac{X_{Bi}}{a_{rj}} \;;\; a_{rj} > 0\right\}$ ، تفيد هذه النسبة في معرفة المتغير الداخل التي يمكن الحصول عليها ، وتجدر الاشارة أن القسمة على عنصر سالب أو صفر في العمود المحوري غير مسموح به.

2-4-2- 5- صف محوري Pivot row:

أ) استبدل المتغير المتبقي في العمود الأساسي بالمتغير الداخل.

ب) صف محوري جديد يساوي الصف المحوري الحالي مقسوما على العنصر المحوري.

ج) جميع الصفوف الأخرى:

الصف الجديد = الصف الحالي – (معامل العمود المحوري) × صف محوري جديد.

مثال 12:

أستخدم طريقة السمبلكس في إيجاد الحل الأمثل للنموذج التالي:

$$Max\ Z = 18X + 15Y$$
$$3X + 3Y \le 15$$
$$9X + 6Y \le 36$$
$$X \ge 0 \;,\; Y \ge 0$$

حل المثال 12:

أولا نقوم بتحويل الشكل القانوني إلى شكل معياري وذلك بإضافة متغيرات وهمية (مكملة) S_1 و S_2 ، فيكون النموذج كما يلي:

$$Max\ Z = 18X + 15Y$$
$$3X + 3Y + S_1 = 15$$
$$9X + 6Y + S_2 = 36$$
$$X, Y, S_1, S_2 \geq 0$$

جدول رقم1:

CB	Cj	18	15	0	0	الحل
	BV	x	y	S1	S2	$b = x_B$
0	S1	3	3	1	0	15
0	S2	9	6	0	1	36
	$Z_j = \sum CB_i a_{ij}$	0	0	0	0	Z=0
	Zj-Cj	-18	-15	0	0	

نلاحظ أن قيمة Z في الحل هي صفر، غايتنا هي تحسين الحل وذلك باستبدال المتغيرات الأساسية (الوهمية) بالمتغيرات غير الأساسية والتي تعطي قيما موجبة، أهم الخطوات نوجزها كالتالي:

- المتغير الداخل يكون ذو القيمة الأصغر (أقل قيمة) في دالة الهدف و يكون X (-18) هو المتغير الداخل.

- المتغير الخارج اختياره يكون من خلال عمود الحل وذلك بأخذ أقل نسبة ، لدينا: ($\frac{36}{9} = 4$ و $\frac{15}{3} = 5$)، إذن S_2 هو المتغير الخارج، ويسمى العنصر

الذي يتقاطع فيه عمود المتغير الداخل مع صفه بالعنصر المحوري (pivot element).

الصف المحوري 1:

	9/9	6/9	0	1/9	36/9
L.pivot 1	1	2/3	0	1/9	4

الصف الجديد $New.L.S_1$: $New.L.S_1 = L.S_1 - 3L.pivot1$

New,LS1	0	1	1	-2/3	3

الصف الجديد $New.L.Z$: $New.L.Z = L.Z + 18L.pivot1$

New,LZ	0	-3	0	2	72

جدول رقم2:

CB	Cj	18	15	0	0	الحل
	BV	**x**	**y**	**S1**	**S2**	$b = x_B$
0	**S1**	0	1	1	-2/3	**3**
18	**x**	1	2/3	0	1/9	**4**
	$Z_j = \sum CB_i a_{ij}$	**18**	**12**	**0**	**2**	**Z=72**
	Zj-Cj	0	-3	0	2	

بنفس الخطوات السابقة: المتغير الداخل يكون ذو القيمة الأصغر (أقل قيمة) في دالة الهدف

و يكون Y (-3) هو المتغير الداخل.

المتغير الخارج اختياره يكون من خلال عمود الحل وذلك بأخذ أقل نسبة ، لدينا:

$(3 = \frac{3}{1}$ و $6 = \frac{4}{2/3})$، إذن S_1 هو المتغير الخارج

الصف المحوري 2:

	0	1	1	-2/3	3
L.pivot 2	0	1	1	-2/3	3

الصف الجديد $New.L.X$: $New.L.X = L.X - \frac{2}{3}L.pivot2$

New,LX	1	0	-2/3	5/9	2

الصف الجديد $New.L.Z$: $New.L.Z = L.Z + 3L.pivot1$

New,LZ	0	0	3	0	81

جدول رقم2:

CB	Cj	18	15	0	0	الحل
	BV	x	y	S1	S2	$b = x_B$
15	y	0	1	1	-2/3	3

18	**x**	1	0	-2/3	5/9	**2**
	$Z_j = \sum CB_i a_{ij}$	**18**	**15**	**3**	**0**	**Z=81**
	Zj-Cj	0	0	3	1	

نلاحظ أن $Z_j - C_j \geq 0$ ، فأن هذا الجدول يمثل الحل النهائي، والحل الأمثل نجده في عمود الحل، أي: $\{X = 2 \ , \ Y = 3 \ , \ Z = 81\}$.

تطبيق هذا المثال على برنامج Maple يكون على النحو الاتي:

```
restart;
with(simplex);
basis, convexhull, cterm, define_zero, display, dual, feasible, maximize, minimize, pivot, pivoteqn, pivotvar, ratio, setup, standardize]
constraintsA := [3 x + 3 y ≤ 15, 9 x + 6 y ≤ 36];
                    constraintsA := [3 x + 3 y ≤ 15, 9 x + 6 y ≤ 36]
display(%);
                    [3 3] [x]    [15]
                    [9 6] [y] ≤  [36]
C1 := setup(constraintsA);
                    C1 := [_SL1 = 15 − 3 x − 3 y, _SL2 = 36 − 9 x − 6 y]
basis(%);
                    [_SL1, _SL2]
display(C1);
                    [1 0 3 3]    [15]
                    [0 1 9 6] =  [36]
objA := (x, y) → 18 x + 15 y;
                    objA := (x, y) ↦ 18 x + 15 y

maximize(objA(x, y), constraintsA);
                                        {x = 2, y = 3}
objA(2, 3);
                                        81
```

مثال 13:

تقوم ورشة بتصنيع نوعين من الخزانات باستخدام ثلاثة مواد: الخشب والطلاء والحديد، مع العلم أن إنجاز النوع الأول: يتطلب 4 متر من الخشب و 5 كلغ من الطلاء و 1 كلغ من الحديد، ويتطلب انجاز النوع الثاني: 3 متر من الخشب و 2 كلغ من الطلاء و 3 كلغ من الحديد ، مخزن هذه الورشة يحوي على: 200 متر من الخشب و 150 كلغ من الطلاء و 180 كلغ من الحديد أسبوعيا، تحقق المنتجات المصنعة ربحا قدره 15 و. نقدية لكل وحدة مباعة من النوع الأول و 10 و. نقدية لكل وحدة مباعة من النوع الثاني.

المطلوب: إيجاد الحل بطريقة السمبلكس.

	النوع 1	النوع 2	الموارد المتاحة
الخشب	4	3	200
الطلاء	5	2	150
الحديد	1	3	180
الربح	15	10	

حل المثال 13:

نفرض أن X تمثل الكمية المباعة لخزانات النوع الأول ، و Y الكمية المباعة لخزانات النوع الثاني ، تكون صياغة النموذج على النحو الاتي:

$$Max\ Z = 15X + 10Y$$
$$4X + 3Y \leq 200$$
$$5X + 2Y \leq 150$$
$$X + 3Y \leq 180$$
$$X \geq 0 \ , \ Y \geq 0$$

أولا نقوم بتحويل الشكل القانوني إلى شكل معياري وذلك بإضافة متغيرات وهمية (مكملة) S_1 و S_2 ، S_3 ، فيكون النموذج كما يلي:

$$Max\ Z = 15X + 10Y$$
$$4X + 3Y + S_1 = 200$$
$$5X + 2Y + S_2 = 150$$
$$X + 3Y + S_3 = 180$$
$$X, Y, S_1, S_2, S_3 \geq 0$$

جدول رقم1:

CB	Cj	15	10	0	0	0	الحل
	BV	x	y	S1	S2	S3	$b = x_B$
0	S1	4	3	1	0	0	200
0	S2	5	2	0	1	0	150
0	S3	1	3	0	0	1	180
	$Z_j = \sum CB_i a_{ij}$	0	0	0	0	0	Z=0
	Zj-Cj	-15	-10	0	0	0	

نلاحظ أن قيمة Z في الحل هي صفر، غايتنا هي تحسين الحل وذلك باستبدال المتغيرات الأساسية (الوهمية) بالمتغيرات غير الأساسية والتي تعطي قيما موجبة، أهم الخطوات نوجزها كالتالي:

- المتغير الداخل يكون ذو القيمة الأصغر (أقل قيمة) في دالة الهدف و يكون X (-15) هو المتغير الداخل.

- المتغير الخارج اختياره يكون من خلال عمود الحل وذلك بأخذ أقل نسبة ، لدينا: ($\frac{200}{4} = 50$ و $\frac{150}{5} = 30$ و $\frac{180}{1} = 180$)، إذن S_2 هو المتغير الخارج، ويسمى العنصر الذي يتقاطع فيه عمود المتغير الداخل مع صفه بالعنصر المحوري (pivot element).

الصف المحوري 1:

L.pivot 1	1	2/5	0	1/5	0	30

الصف الجديد $New.L.S_1$: $New.L.S_1 = L.S_1 - 4L.pivot1$

New,LS1	0	7/5	1	-4/5	0	80

الصف الجديد $New.L.S_3$: $New.L.S_3 = L.S_3 - L.pivot1$

New,LS3	0	13/5	0	-1/5	1	150

الصف الجديد $New.L.Z$: $New.L.Z = L.Z + 15L.pivot1$

New,LZ	0	-4	0	3	0	450

جدول رقم2:

CB	**Cj**	**15**	**10**	**0**	**0**	0	الحل
	BV	**x**	**y**	**S1**	**S2**	**S3**	$b = x_B$
0	**S1**	0	7/5	1	-4/5	0	80
15	**x**	1	2/5	0	1/5	0	30
0	**S3**	0	13/5	0	-1/5	1	150
	$Z_j = \sum CB_i a_{ij}$	**15**	**6**	**0**	**3**	**0**	**Z=450**
	Zj-Cj	**0**	**-4**	**0**	**3**	**0**	

بنفس الخطوات السابقة: المتغير الخارج اختياره يكون من خلال عمود الحل وذلك بأخذ أقل نسبة ، لدينا: $\left(\frac{80*5}{7} = 57.14\right.$ و $\frac{30*5}{2} = 75$ و $\left.\frac{150*5}{13} = 57.69\right)$، ، إذن المتغير الخارج هو S_1.

الصف المحوري 2:

L.pivot 2	0	1	5/7	-4/7	0	400/7

الصف الجديد $New.L.X$: $New.L.X = L.X - \frac{2}{5} L.pivot2$

New,LX	1	0	-2/7	3/7	0	50/7

الصف الجديد $New.L.S_3$: $New.L.S_3 = L.S_3 - \frac{13}{5} L.pivot2$

New,LS3	0	0	-13/7	9/7	0	10/7

الصف الجديد $New.L.Z$: $New.L.Z = L.Z + 4L.pivot2$

New,LZ	0	0	20/7	5/7	0	4750/7

جدول رقم3:

CB	**Cj**	**15**	**10**	**0**	**0**	0	الحل
	BV	**x**	**y**	**S1**	**S2**	**S3**	$b = x_B$
10	**y**	0	1	5/7	-4/7	0	400/7
15	**x**	1	0	-2/7	3/7	0	50/7
0	**S3**	0	0	-13/7	9/7	0	10/7
	$Z_j = \sum CB_i a_{ij}$	**15**	**10**	**20/7**	**5/7**	**0**	**Z=4750/7**
	Zj-Cj	**0**	**0**	**20/7**	**5/7**	**0**	

نلاحظ أن $Z_j - C_j \geq 0$ ، فأن هذا الجدول يمثل الحل النهائي، والحل الأمثل نجده في عمود الحل، أي: $\left\{ X = \frac{50}{7} \ , \ Y = \frac{400}{7} \ , \ Z = \frac{4750}{7} \right\}$.

تطبيق هذا المثال على برنامج Maple يكون على النحو الاتي:

```
> with(simplex) :
> cnsts := { 4x + 3y ≤ 200, 5x + 2y ≤ 150, x + 3y ≤ 180} :
> obj := 15x + 10y :
> maximize(obj, cnsts union {0 ≤ x, 0 ≤ y})
```

$$\left\{x = \frac{50}{7}, y = \frac{400}{7}\right\}$$

```
objA := (x, y) → 15x + 10y;
```

$$objA := (x, y) \mapsto 15x + 10y$$

```
> objA(50/7, 400/7);
```

$$\frac{4750}{7}$$

```
>
```

2-4-3- مفاهيم جبرية حول البرمجة الخطية (استخدام الحساب المصفوفي) أو طريقة السمبلكس المعدلة Revised simplex method[1]:

ليكن لدينا النموذج التالي وفق الشكلين (القانوني و المعياري):

$$\begin{array}{ll} Max\ CX & Max\ CX \\ AX \leq b & AX + Ie = b \quad \ldots\ldots\ldots(P) \\ X \geq 0 & X, e \geq 0 \end{array}$$

[1] - تم تطوير هذه الطريقة من قبل GEORGE B. DANTZIG و ALEX ORDEN و PHILIP WOLFE في " Rand Corporation" في سنة 1953.

حيث : $e = \begin{bmatrix} e_1 \\ . \\ . \\ e_n \end{bmatrix} \in \Re^n$ شعاع مكونات متغيرات الفجوة.

مبرهنة:

مجموعة الحلول الممكنة لجملة القيود الخطية $(A,I)X = b........(1)$ مع $X \geq 0$ والتي نرمز لها بالرمز E (غير خالية) بالمجموعة المحدبة. GEORGE B. DANTZIG, ALEX ORDEN, PHILIP WOLFE

تعريف1:

المجموعة E تدعى بالمحدبة إذا كان:

$\forall x, y \in E : \forall \alpha, \beta \in [0,1] \;\; ; \;\; \alpha x + \beta y \in E$ مع $\alpha + \beta = 1$.

تعريف2:

التوليفة الخطية لعناصر E ($\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$) تكون مجموعة محدبة إذا كان $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ ، مع $\lambda_i \geq 0$.

مثال14:

إذا فرضنا أي شعاعين (X_1, X_2) بحيث $X_1, X_2 \in E$ ، مع $X_1, X_2 \geq 0$ ، فأن: $(A,I)X_1 = b$ ،$(A,I)X_2 = b$ ، وإذا فرضنا أن النقطة X تمثل توليفة خطية محدبة X_1, X_2 ، وبالتالي فأن: (2) .... $X = (1-\lambda)X_1 + \lambda X_2$ ، $0 \leq \lambda \leq 1$ مع $X \geq 0$.

نضرب طرفي (2) في المصفوفة (A,I) فنجد:

$$\begin{aligned}(A,I)X &= (A,I)(1-\lambda)X_1 + (A,I)\lambda X_2 \\ &= (A,I)X_1 - \lambda(A,I)X_1 + \lambda(A,I)X_2 \\ &= b - \lambda b + \lambda b = b\end{aligned}$$

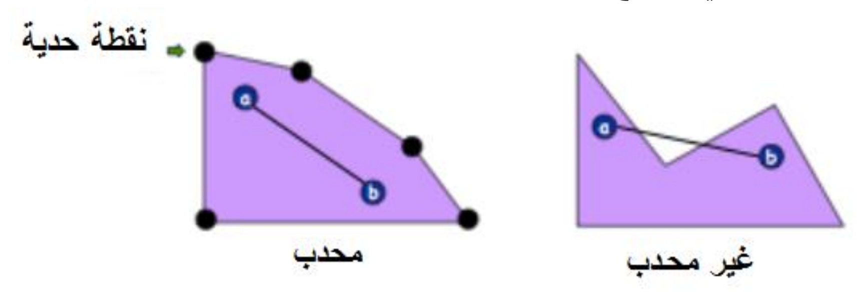
يدل هذا أن النقطة X هي حل ممكن للجملة (1).

مبرهنة:

مجموعة النقاط الحدية للمضلع المحدب [1] أو المجسم متعدد الوجوه المحدب E تمثل مجموعة الحلول الممكنة.

إذن كل حل أساسي مسموح به (ممكن) Basic feasible solution تقابله **نقطة حدية** point extreme من المنطقة المسموح به (مضلع أو مجسم متعدد الوجوه ، بصفة عامة المنطقة المضلعة).

يمكن تمثيل المتباينات في المستوي (2D) ، بحيث أن مجموعة المتباينات تمكننا من إنشاء فضاء مشترك يمثل الحل المسموح به يدعى بالمضلع المحدب polygone convexe أو متعدد السطوح المحدب polyèdre convexe في حالة أكثر من بعدين، الشكل التالي يوضح لنا الشكل المحدب والنقاط الحدية.



أما عن أهمية النقاط الحدية فتتمثل في كون حالة ما إذا كان متعدد السطوح يحوي حل أمثل ، فأن هذا الحل يقع على إحدى النقاط الحدية.

الحلول الأساسية والحلول الممكنة

تعريف:

ليكن النموذج الخطي (P) على الشكل المعياري، بحيث:

X : شعاع له n مركبة.

b: شعاع له m مركبة.

A : مصفوفة $(n \times m)$ حيث: $(n < m)$.

---

[1]- **المضلع المحدب polygon convexe** يستخدم في حالة $\Re^2$ ، أما مجسم متعدد الوجوه سواء كان polytope convexe أو polyédre convexe يستخدم في حالة ثلاثة أبعاد فما فوق.

نفرض أن رتبة A = رتبة $m=(A,b)$ ، وأن الأشعة الـ m الأولى من المصفوفة A هي أشعة مستقلة خطيا.

الشعاع X^* هو حل لـ (P) إذا حقق $AX^*=bX^*$ و حل مسموح به إذا كان $X^*>0$ ، في هذه الحالة $AX=b$ (يملك على الأقل حلا) ولا يحوي على معادلة مكررة.

إن طريقة السمبلكس تعتمد في حلها للنموذج (P) على توليد متتالية من الحلول المسموح بها ، والتي تنتهي عند الحل الأمثل، إن منطقة الحل تحوي عددا من النقاط الحدية، والحل عند كل خطوة هو عبارة عن نقطة حدية (النقاط الحدية عبارة عن أركان منطقة الحل المسموح به) ، وبالتالي فأن الجملة (P) لـ n متغير و m معادلة (m<n) يوجد (n−m) متغيرات مستقلة تسمى بالمتغيرات خارج الأساس ، و m متغيرات مرتبطة تسمى بمتغيرات الأساس، الحل الأساسي يتضمن (n−m) من المتغيرات تأخذ قيما صفرية تدعى كما قلنا سابقا بالمتغيرات غير الأساسية ، والمتغيرات m الباقية لها قيم غير سالبة تدعى بالمتغيرات الأساسية، طريقة السمبلكس تعمل على تغيير منتظم متبادل بين المتغيرات الأساسية وغير الأساسية كي نصل إلى الحل الأمثل للبرنامج الخطي (P).

يتم التوصل للحل الأمثل بعدد محدود من الخطوات بحيث تتناقص قيمة دالة الهدف في كل خطوة عن الخطوة التي سبقتها.

نقوم بتجزئة المصفوفة A على الشكل $A=[B,H]$ ، يصبح النموذج الخطي (P) كما يلي:

$$BX_B+HX_H=b \quad ....(3) \quad , \quad X_B\geq 0 \; , \; X_H\geq 0$$

$$C_BX_B+C_HX_H=Z(\max).........(4)$$

$X_B\in\Re^{m\times 1}$: شعاع عمودي مكون لمتغيرات الأساس.

$X_H\in\Re^{(n-m)\times 1}$: شعاع عمودي مكون لمتغيرات خارج الأساس.

$B \in \Re^{m\times n}$: مصفوفة غير شاذة مكونة لمعاملات المتغيرات الأساسية.

$H \in \Re^{m\times(n-m)}$: مصفوفة مكونة لمعاملات المتغيرات غير الأساسية.

$C_B \in \Re^{1\times m}$: شعاع أفقي مكون لمعاملات المتغيرات الأساسية في دالة الهدف.

$C_H \in \Re^{1\times(n-m)}$: شعاع أفقي مكون لمعاملات المتغيرات غير الأساسية في دالة الهدف.

حالة خاصة: الحل الأمثل يعطى بالصيغة التالية: $X_B = B^{-1}b$ ، لأن متغيرات خارج الأساس يجب أن تكون معدومة أي: $X_H = 0$.

نضع $X_H = 0$ إذن: $BX_B = b$ حل وحيد، حيث $X = (X_B, X_H)$ إذن الشعاع $(X_B, 0)$ حل للجملة $AX = b$.

تعريف:

يسمى الشعاع $X = (X_B, X_H)$ حيث $X_H = 0$ ، $X_B = B^{-1}b..........(5)$ حلا أساسيا مسموح به بالنسبة لـ $AX = b$.

شرط الأمثلية:

ذكرنا في الفقرات السابقة أن كفاءة طريقة السمبلكس أنها تكمن في عملية الانتقال من حل أساسي إلى حل أساسي أفضل من سابقه ، ولهذا قام Dantzig عندما عبر عن المتغيرات الأساسية الداخلة في الحل بدلالة المتغيرات غير الأساسية، حيث أن تحديد أفضل متغير غير أساسي يمكن أن يدخل في الحل عندما يكون تأثيره في دالة الهدف أفضل من أي متغير أخر غير أساسي، سيتم تحديد كيفية اختيار هذا المتغير (غير الأساسي) و إدخاله في الحل.

من خلال الصيغة (3) نلاحظ أن: $BX_B = b - HX_H$ ، نضرب المعادلة الأخيرة في B^{-1} ، حيث B^{-1} هي مقلوب المصفوفة B ، لتصبح الصيغة كما يلي:

$$X_B = B^{-1}b - B^{-1}HX_H.......(6)$$

وبتعويض (6) في (4) نحصل على الصيغة التالية:

$$Z = C_B\left(B^{-1}b - B^{-1}HX_H\right) + C_H X_H$$
$$\therefore Z = C_B B^{-1}b - C_B B^{-1}HX_H + C_H X_H$$
$$\therefore Z = C_B B^{-1}b - \left(C_B B^{-1}H - C_H\right) X_H \;.........(7)$$

يمكن كتابة (7) بشكل أخر:

$$Z = C_B B^{-1}b - \sum_{j\in H}\left(Z_j - C_j\right)X_j \;.........(8)$$

من خلال الصيغة (8) نجد أن أقل قيمة لمعاملات المتغيرات غير الأساسية $(j=1,....,n)$ $(Z_j - C_j)$ يعتبر أفضل متغير يمكن إدخاله في الحل الأساسي، لأنه يؤدي إلى تحسين دالة الهدف، وتستمر عملية التكرار بنفس الكيفية مادام $(Z_j - C_j < 0)$ ، فأن الحل في هذه الحالة ليس أمثليا، بحيث يتم اختيار المتغير المرشح للدخول الذي يملك أقل قيمة بالسالب، وعندما تكون جميع المتغيرات غير الأساسية $(Z_j - C_j)$ قيم غير سالبة فأن هذا يعني أن أي متغير من المتغيرات غير الأساسية إذا فرضنا دخوله لا يؤدي إلى تحسين دالة الهدف ، وبالتالي فأن الحل الحالي يعتبر أمثليا.

لتوضيح أكثر نستعين بالجدول التالي:

			C_1	C_2	$....C_n$	0	0	$...0$
معاملات المتغيرات الأساسية	**المتغيرات الأساسية**	**قيم المتغيرات الأساسية** $b=(x_B)$	**المتغيرات**					
			x_1	x_2	$.............x_n$	S_1	S_2	$.......S_m$
C_{B1}	S_1	$x_{B1}=b_1$	a_{11}	a_{12}	$.............a_{1n}$	1	0	1
C_{B2}	S_2	$x_{B2}=b_2$	a_{21}	a_{22}	$.............a_{2n}$	0	1	0
. . C_{Bm}	. . S_m	. . $x_{Bm}=b_m$	. . a_{m1}	. . a_{m2}	.... $.............a_{mn}$	. . .	. . .	1
		$Z_j=\sum c_{Bi}x_j$	0	0	0	0	0	0
$Z=C_B X_B$		$Z_j - C_j$	Z_1-C_1	Z_2-C_2	$......Z_n-C_n$	0	0	0

يتم إعداد الجدول الأولي بتحديد أولا المصفوفة الواحدية identity matrix والتي يتم الحصول عليها من مصفوفة الأساس، إن الحل الأساسي المسموح به يمثل بـ $B = I$ ، تمثل أعمدة المصفوفة الواحدية معاملات متغيرات الفجوة التي تم إضافتها ، يمثل كل عمود في المصفوفة الواحدية أيضا متغيرا أساسيا ، نقوم بتعيين قيم الثوابت لمتغيرات العمود في المصفوفة الواحدية $X_B = B^{-1}b = Ib = b$.

يشير الصف الأول في الجدول السابق إلى معاملات C_j للمتغيرات في دالة الهدف، تمثل هذه القيم التكلفة (أو الربح) لكل وحدة مرتبطة بمتغير في دالة الهدف، وتستخدم لتحديد المتغير الذي سيتم إدخاله في مصفوفة الأساس B ، يشير العمود C_B إلى معاملات المتغيرات الأساسية في دالة الهدف ، حيث تستخدم هذه القيم لحساب قيمة Z عندما يتم إدخال وحدة من أي متغير في الحل، يمثل العمود X_B قيم المتغيرات الأساسية في الحل الأساسي الحالي.

تمثل قيم Z_j المقدار الذي يتم من خلاله تقليل (أو زيادة) قيمة دالة الهدف إذا تمت إضافة وحدة واحدة من المتغير المختار (المحدد) إلى الحل الجديد ، أما القيم $Z_j - C_j$ فتمثل القيمة الصافية في دالة الهدف ، والتي تحدث عندما يتم إدخال وحدة واحدة من المتغير الذي يمثله رأس العمود في الحل.

إذا كان $Z_j - C_j \geq 0$ الحل المسموح به يعتبر أمثلي.

بالنسبة للنقطة الأخيرة يعتبر حل أمثل لأن $B^{-1}b \geq 0$ ، و شعاع التكاليف يكون: ($C_B B^{-1}H - C_H \geq 0$ أو $C_H - C_B B^{-1}H \leq 0$ في حالة Max) و ($C_B B^{-1}H - C_H \leq 0$ أو $C_H - C_B B^{-1}H \geq 0$ في حالة Min).

مثال15:

بالرجوع لبيانات المثال (2)، استخدم الحساب المصفوفي لطريقة السمبلكس في إيجاد الحل الأمثل.

$$\begin{aligned} &Max\ Z = 18x+15y \\ &3x+3y \le 15 \\ &9x+6y \le 36 \\ &x,y \ge 0 \end{aligned}$$

حل المثال15:

$$\begin{aligned} &Max\ Z = 18x+15y \\ &3x+3y+S_1 = 15 \\ &9x+6y+S_2 = 36 \\ &x,y,S_1,S_2 \ge 0 \end{aligned}$$

الخطوة 0:

$$H=\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 9 & 6 \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=B^{-1},\ b=\begin{bmatrix} 15 \\ 36 \end{bmatrix},\ \begin{cases} C_B=[0\ ,\ 0] \\ C_H=[18\ ,\ 15] \end{cases}$$

$$X_B=B^{-1}b=\begin{bmatrix} 15 \\ 36 \end{bmatrix},\ Z_0=C_BB^{-1}b=C_BX_B=0$$

$$C_BB^{-1}H-C_H=[-18\ ,\ -15]..........(1)$$

الخطوة 1:

أولا علينا تحديد المتغير المرشح للدخول من خلال الصيغة (1)، نلاحظ أن المتغير x هو المرشح (لكونه له أكبر معامل بالسالب)، ثانيا علينا إجراء اختبار النسبة لتحديد العنصر المحوري: $i=2 \Leftarrow Min\left\{\frac{15}{3}=5\ ,\ \frac{36}{9}=4\right\}$ ، إذن x يكون في موضع S_2.

$$H=\begin{bmatrix}0 & 3\\1 & 6\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}1 & 3\\0 & 9\end{bmatrix}\Rightarrow B^{-1}=\begin{bmatrix}1 & \frac{-1}{3}\\0 & \frac{1}{9}\end{bmatrix},\ \begin{cases}C_B=[0\ ,\ 18]\\C_H=[0\ ,\ 15]\end{cases}$$

$$X_B=\begin{bmatrix}S_1\\x\end{bmatrix}=B^{-1}b=\begin{bmatrix}1 & \frac{-1}{3}\\0 & \frac{1}{9}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}15\\36\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix},\ X_H=\begin{bmatrix}S_2\\y\end{bmatrix}$$

$$Z_1=C_BX_B=[0\ ,\ 18]\cdot\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}=72\ ,\ B^{-1}H=\begin{bmatrix}\frac{-1}{3} & 1\\\frac{1}{9} & \frac{2}{3}\end{bmatrix}$$

$$C_BB^{-1}H-C_H=[0\ ,\ 18]\cdot\begin{bmatrix}\frac{-1}{3} & 1\\\frac{1}{9} & \frac{2}{3}\end{bmatrix}-[0\ ,\ 15]=[2\ ,\ -3]..........(2)$$

الخطوة 2:

أولا علينا تحديد المتغير المرشح للدخول من خلال الصيغة (2)، نلاحظ أن المتغير y هو المرشح (لكونه له أكبر معامل بالسالب)، ثانيا علينا إجراء اختبار النسبة لتحديد العنصر المحوري: $Min\left\{\frac{3}{1}=3\ ,\ \frac{4\times 3}{2}=6\right\}\Rightarrow i=1$ ، إذن y يكون في موضع S_1.

$$H=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}3&3\\6&9\end{bmatrix}\Rightarrow B^{-1}=\begin{bmatrix}1&\frac{-1}{3}\\\frac{-2}{3}&\frac{1}{9}\end{bmatrix},\ \begin{cases}C_B=[15\ ,\ 18]\\C_H=[0\ ,\ 0]\end{cases}$$

$$X_B=\begin{bmatrix}y\\x\end{bmatrix}=B^{-1}b=\begin{bmatrix}1&\frac{-1}{3}\\\frac{-2}{3}&\frac{1}{9}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}15\\36\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix},\ X_H=\begin{bmatrix}S_2\\S_1\end{bmatrix}$$

$$Z_2=C_BX_B=[15\ ,\ 18]\cdot\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}=81\ ,\ B^{-1}H=\begin{bmatrix}\frac{-1}{3}&1\\\frac{1}{3}&\frac{-2}{3}\end{bmatrix}$$

$$C_BB^{-1}H-C_H=[15\ ,\ 18]\cdot\begin{bmatrix}\frac{-1}{3}&1\\\frac{1}{3}&\frac{-2}{3}\end{bmatrix}-[0\ ,\ 0]=[1\ ,\ 3]..........(3)$$

من خلال الصيغة (3)، نلاحظ أن $(C_BB^{-1}H-C_H\geq 0)$ ، ومنه نستنتج أن هذا هو الحل الأمثل، إذن: $\{x=2\ ,\ y=3\ ,\ Z=81\}$

مثال16:

اليك البرنامج الخطي التالي، المطلوب: استخدام الحساب المصفوفي لطريقة السمبلكس في إيجاد الحل الأمثل.

$$\begin{aligned}&Max\ f\ =\ 6x+3y+3z\\&9x+3y+3z\leq 180\\&3x-3y+6z\leq 30\\&3x+3y-3z\leq 60\\&x,y,z\geq 0\end{aligned}$$

حل المثال16:

$$\begin{aligned} &Max\ f = 6x+3y+3z \\ &9x+3y+3z+S_1=180 \\ &3x-3y+6z+S_2=30 \\ &3x+3y-3z+S_3=60 \\ &x,y,z,S_1,S_2,S_3 \geq 0 \end{aligned}$$

الخطوة 0:

$$H=\begin{bmatrix} 9 & 3 & 3 \\ 3 & -3 & 6 \\ 3 & 3 & -3 \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=B^{-1},\ b=\begin{bmatrix} 180 \\ 30 \\ 60 \end{bmatrix},\ \begin{cases} C_B=[0\ ,0\ ,\ 0] \\ C_H=[6\ ,3\ ,\ 3] \end{cases}$$

$$X_B=B^{-1}b=\begin{bmatrix} 180 \\ 30 \\ 60 \end{bmatrix},\ f_0=C_BB^{-1}b=C_BX_B=0$$

$$C_BB^{-1}H-C_H=[-6\ ,-3\ ,\ -3]..........(1)$$

الخطوة 1:

أولا علينا تحديد المتغير المرشح للدخول من خلال الصيغة (1)، نلاحظ أن المتغير x هو المرشح (لكونه له أكبر معامل بالسالب)، ثانيا علينا إجراء اختبار النسبة لتحديد العنصر المحوري: $Min\left\{\frac{180}{9}=20\ ,\ \frac{30}{3}=10\ ,\ \frac{60}{3}=20\right\} \Rightarrow i=2$ ، إذن x يكون في موضع S_2 .

$$H=\begin{bmatrix}0&3&3\\1&-3&6\\0&3&-3\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}1&9&0\\0&3&0\\0&3&1\end{bmatrix}\Rightarrow B^{-1}=\begin{bmatrix}1&-3&0\\0&\frac{1}{3}&0\\0&-1&1\end{bmatrix},\ \begin{cases}C_B=[0\ ,\ 6\ ,\ 0]\\C_H=[0\ ,\ 3\ ,3]\end{cases}$$

$$X_B=\begin{bmatrix}S_1\\x\\S_3\end{bmatrix}=B^{-1}b=\begin{bmatrix}1&-3&0\\0&\frac{1}{3}&0\\0&-1&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}180\\30\\60\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}90\\10\\30\end{bmatrix},\ B^{-1}H=\begin{bmatrix}-3&12&-15\\\frac{1}{3}&-1&2\\-1&6&-9\end{bmatrix}$$

$$f_1=C_BX_B=[0\ ,\ 6\ ,\ 0]\cdot\begin{bmatrix}90\\10\\30\end{bmatrix}=60$$

$$C_BB^{-1}H-C_H=[0\ ,\ 6\ ,\ 0]\cdot\begin{bmatrix}-3&12&-15\\\frac{1}{3}&-1&2\\-1&6&-9\end{bmatrix}-[0\ ,\ 3\ ,3]=[2\ ,\ -9\ ,9]\ ....(2)$$

الخطوة 2:

أولا علينا تحديد المتغير المرشح للدخول من خلال الصيغة (2)، نلاحظ أن المتغير y هو المرشح (لكونه له أكبر معامل بالسالب)، ثانيا علينا إجراء اختبار النسبة لتحديد العنصر المحوري: $Min\left\{\frac{90}{12}=7.5\ ,\ \frac{30}{6}=5\right\}\Rightarrow i=3$ ، إذن y يكون في موضع S_3.

$$H=\begin{bmatrix}0&0&3\\1&0&6\\0&1&-3\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}1&9&3\\0&3&-3\\0&3&3\end{bmatrix}\Rightarrow B^{-1}=\begin{bmatrix}1&-1&-2\\0&\frac{1}{6}&\frac{1}{6}\\0&-\frac{1}{6}&\frac{1}{6}\end{bmatrix},\ \begin{cases}C_B=[0\ ,\ 6\ ,\ 3]\\C_H=[0\ ,\ 0\ ,3]\end{cases}$$

$$X_B=\begin{bmatrix}S_1\\x\\y\end{bmatrix}=B^{-1}b=\begin{bmatrix}1&-1&-2\\0&\frac{1}{6}&\frac{1}{6}\\0&-\frac{1}{6}&\frac{1}{6}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}180\\30\\60\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}30\\15\\5\end{bmatrix},\ B^{-1}H=\begin{bmatrix}-1&-2&3\\\frac{1}{6}&\frac{1}{6}&\frac{1}{2}\\-\frac{1}{6}&\frac{1}{6}&-\frac{3}{2}\end{bmatrix}$$

$$f_2=C_BX_B=[0\ ,\ 6\ ,\ 3]\cdot\begin{bmatrix}30\\15\\5\end{bmatrix}=105$$

$$C_BB^{-1}H-C_H=[0\ ,\ 6\ ,\ 3]\cdot\begin{bmatrix}-1&-2&3\\\frac{1}{6}&\frac{1}{6}&\frac{1}{2}\\-\frac{1}{6}&\frac{1}{6}&-\frac{3}{2}\end{bmatrix}-[0\ ,\ 0\ ,3]=\left[\frac{1}{2}\ ,\ \frac{3}{2}\ ,-\frac{9}{2}\right]\ ....(3)$$

الخطوة 3:

أولا علينا تحديد المتغير المرشح للدخول من خلال الصيغة (3)، نلاحظ أن المتغير z هو المرشح (لكونه له أكبر معامل بالسالب)، ثانيا علينا إجراء اختبار النسبة لتحديد العنصر المحوري: $Min\left\{\frac{30}{3}=10\ ,\ \frac{15}{1/2}=30\right\}\Rightarrow i=1$ ، إذن z يكون في موضع S_1 .

$$X_B=\begin{bmatrix} z \\ x \\ y \end{bmatrix}=B^{-1}b=\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{2}{3} & -\frac{5}{6} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 180 \\ 30 \\ 60 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 20 \end{bmatrix},\ B^{-1}H=\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{5}{6} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$f_3=C_BX_B=[3\ ,\ 6\ ,\ 3]\cdot\begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 20 \end{bmatrix}=150$$

$$C_BB^{-1}H-C_H=[3\ ,\ 6\ ,\ 3]\cdot\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{5}{6} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}-[0\ ,0\ ,0]=\left[-1\ ,\ -\frac{3}{2}\ ,\ \frac{3}{2}\right]\ ....(4)$$

بالرغم من دخول جميع المتغيرات z,y,x إلى المصفوفة الأساسية إلا أن الحل لم يتحسن بعد، نظرا لوجود قيم سالبة (الصيغة 4) .

الخطوة 4:

من خلال الصيغة (4)، نلاحظ أن المتغير S_2 هو المرشح للدخول مرة ثانية (لكونه له أكبر معامل بالسالب)، ثانيا علينا إجراء اختبار النسبة لتحديد العنصر المحوري: $Min\left\{\frac{10}{1/2}=\ 20\right\}\Rightarrow i=2$ ، إذن S_2 يكون في موضع x.

$$H=\begin{bmatrix} 9 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 6 & 1 & -3 \\ -3 & 0 & 3 \end{bmatrix}\Rightarrow B^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{1}{6} & 0 & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix},\ \begin{cases} C_B=[3\ ,\ 0\ ,\ 3] \\ C_H=[6\ ,\ 0\ ,0] \end{cases}$$

$$X_B=\begin{bmatrix} z \\ S_2 \\ y \end{bmatrix}=B^{-1}b=\begin{bmatrix} \frac{1}{6} & 0 & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 180 \\ 30 \\ 60 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 20 \\ 30 \\ 40 \end{bmatrix},\ B^{-1}H=\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 3 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 2 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

$$f_4=C_BX_B=[3\ ,\ 0\ ,\ 3]\cdot\begin{bmatrix} 20 \\ 30 \\ 40 \end{bmatrix}=180$$

$$C_BB^{-1}H-C_H=[3\ ,\ 0\ ,\ 3]\cdot\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 3 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 2 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}-[6\ ,0\ ,0]=[3\ ,\ 0\ ,1]\ ....(5)$$

من خلال الصيغة (5)، نلاحظ أن $\left(C_BB^{-1}H-C_H\geq 0\right)$ ، ومنه نستنتج أن هذا هو الحل الأمثل، إذن:

$$\{x=0\ ,\ y=40\ ,\ z=20\ ,\ f=180\}$$

التطبيق على برنامج Maple:

```
with(simplex) :
cnsts := {   9 x + 3 y + 3 z ≤ 180,  3 x − 3 y + 6 z ≤ 30, 3 x + 3 y − 3 z ≤ 60} :
obj := 6 x + 3 y + 3 z :
maximize(obj, cnsts union {0 ≤ x, 0 ≤ y, 0 ≤ z})
                              {x = 0, y = 40, z = 20}
objA := (x, y, z) → 6 x + 3 y + 3 z;
                         objA := (x, y, z) ↦ 6 x + 3 y + 3 z
objA(0, 40, 20);
                                      180
```

2-4-4- الطريقة المبسطة في حالة التدنية SIMPLEX METHOD (MINIMIZATION CASE)

في الفقرات السابقة، تم تطبيق طريقة simplex على مسائل البرمجة الخطية حيث كان الهدف هو تعظيم الربح (مع قيود أقل من أو تساوي≤)، ومع ذلك في كثير من الحالات قد تكون القيود من النوع (≥ أو =) والهدف قد يكون التقليل (مثل التكلفة والوقت وما إلى ذلك)، وبالتالي في مثل هذه الحالات وجب تعديل طريقة simplex للحصول على القيمة المثلى.

والشكل العام لمسألة التدنية يكون كما يلي:

$$MinZ = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$$
$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \geq b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \geq b_2$$
$$..$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \geq b_m$$
$$x_1, x_2, ..., x_n \geq 0$$

يمكن النظر إلى أي مسألة تدنية خطية (Min) على أنها مسألة تعظيم خطية (Max) مكافئة والعكس صحيح ، نوضحها على النحو الاتي:

$MaxZ = -(c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n)$ يمكن كتابتها $MinZ = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$ (مبرهنة)، ثم نقوم بتحويل النموذج إلى الشكل المعياري بإضافة متغيرات وهمية (في حالة ≥) ، وفي حالة المساواة لا نضيف أي متغير وهمي ليصبح الشكل المعياري كما يلي:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n - s_1 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n - s_2 = b_2$$
$$..$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n - s_m = b_m$$
$$x_1, x_2, ..., x_n \geq 0$$
$$s_1, s_2, ..., s_m \geq 0$$

في الحل الأساسي الأولي المسموح به بعد تثبيت $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$ يتم الحصول على:

$$s_1 = -b_1 \quad b \quad - {}_1 = {}_1 s$$
$$s_2 = -b_2 \quad b \quad - {}_2 = {}_2 s$$
$$......................................$$
$$s_m = -b_m \quad b \quad - {}_m = {}_m$$

وهو أمر غير ممكن لأنه يخل بشرط عدم السالبية (أي $S_i \geq 0$)، لذلك نحن بحاجة إلى إدخال متغيرات اصطناعية في النموذج الخطي السابق ليصبح بهذا الشكل:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n - s_1 + A_1 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n - s_2 + A_2 = b_2$$
$$...$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n - s_m + A_m = b_m$$
$$x_1, x_2, ..., x_n \geq 0$$
$$s_1, s_2, ..., s_m \geq 0$$
$$A_1, A_2, ..., A_m \geq 0$$

الأن يمكن الحصول على حل عملي أساسي أولي عن طريق ضبط جميع متغيرات القرار والوهمية على الصفر، وبالتالي فإن الحل الأساسي المسموح به للبرنامج الخطي يكون كما يلي: $A_1 = b_1 \ , \ A_2 = b_2, ..., A_m = b_m$

للحصول على الحل الأمثل ، يجب علينا التخلص من المتغيرات الاصطناعية، فيما يلي نتطرق إلى طريقتان :

1- أسلوب المرحلتين Two Phase method

2- أسلوب م الكبرى Big M.

2-4-4- 1- طريقة المرحلتينTwo Phase method :

في هذه الطريقة يتم تقسيم عملية حل مسألة البرنامج الخطي (LP) التي تتضمن متغيرات اصطناعية إلى مرحلتين:

في المرحلة الأولى: نشكل دالة هدف جديدة عن طريق تخصيص صفر لكل متغير أصلي (بما في ذلك المتغيرات الوهمية: المكملة و الفائض) و (-1) لكل من المتغيرات الاصطناعية، ثم نحاول إزالة المتغيرات الاصطناعية من الأساس، الحل في نهاية المرحلة الأولى هو بمثابة حل أساسي مسموح به للمرحلة الثانية، في المرحلة الثانية يتم تقديم دالة الهدف الأصلية ويتم استخدام خوارزمية simplex المعتادة لإيجاد الحل الأمثل، نوضح ذلك في المثال التالي:

مثال17:

إليك البرنامج الخطي التالي الخاص بمسألة التدنية، المطلوب : إيجاد الحل الأمثل باستخدام طريقة المرحلتين.

$$\begin{aligned} &\text{Min}\, Z = 2x + 3y \\ &10x + 5y \geq 24 \\ &5x + 30y \geq 42 \\ &x, y \geq 0 \end{aligned}$$

حل المثال17:

نستخدم الصيغة المكافئة التالية: $Min\sum_{j=1}^{n} c_j x_j = Max\sum_{j=1}^{n}\left(-c_j\right)x_j$ ، إذا كانت *Z هي القيمة المثلى ، حيث *Z=−Z فأن:

$$\begin{aligned} &Max\ \left(Z^*\right) = -2x - 3y \\ &10x + 5y \geq 24 \\ &5x + 30y \geq 42 \\ &x, y \geq 0 \end{aligned}$$

الشكل المعياري يكون كالتالي:

$$\begin{aligned} &Max\left(Z^*\right) = -2x - 3y \\ &10x + 5y - S_1 = 24 \\ &5x + 30y - S_2 = 42 \\ &x, y, S_1, S_2 \geq 0 \end{aligned}$$

S_1 ، S_2 : متغيرات وهمية (فائض).

إذا تم وضع $x=y=0$ فأن $S_1=-24$, $S_2=-42$ ، لا يمكن هذا لأنه ينافي شرط عدم السالبية لمتغيرات القرار والمتغيرات الوهمية ، نحن بحاجة إلى إضافة متغيرات اصطناعية، فالشكل المعياري يكون كما يلي:

$$Max(Z^*)=-2x-3y$$
$$10x+5y-S_1+A_1=24$$
$$5x+30y-S_2+A_2=42$$
$$x,y,S_1,S_2,A_1,A_2\geq 0$$

A_1,A_2 متغيرات اصطناعية.

المرحلة الأولى:

في هذه المرحلة يتم إزالة المتغيرات الاصطناعية وإيجاد حل مبدئي مسموح به للمسألة الأصلية، دالة الهدف تكون كما يلي:

$$Max(Z^*)=0x+0y+0S_1+0S_2+(-A_1)+(-A_2)$$

الجدول رقم (1):

CB	Cj	0	0	0	0	-1	-1	الحل
	BV	x	y	S1	S2	A1	A2	$b=x_B$
-1	A1	10	5	-1	0	1	0	24
-1	A2	5	30	0	-1	0	1	42
	$Z_j=\sum CB_i a_{ij}$	-15	-35	1	1	-1	-1	Z* =-66
	Zj-Cj	-15	-35	1	1	0	0	

y هو المرشح للدخول (له أقل قيمة (35−)) ، علينا إجراء اختبار النسبة لتحديد العنصر المحوري: $i = 2 \Leftarrow Min\left\{\frac{24}{5} = 4.8, \frac{42}{30} = 1.4\right\}$ ، إذن y يكون في موضع A_2 ، الصف المحوري يكون كالتالي:

pivot	1/6	1	0	-1/30	0	7/5

الجدول رقم (2):

CB	Cj	0	0	0	0	-1	الحل
	BV	**x**	**y**	**S1**	**S2**	**A1**	$b = x_B$
-1	**A1**	55/6	0	-1	1/6	1	**17**
0	**y**	1/6	1	0	-1/30	0	**7/5**
	$Z_j = \sum CB_i a_{ij}$	**-55/6**	**0**	**1**	**-1/6**	**-1**	**Z* =-17**
	Zj-Cj	**-55/6**	**0**	**1**	**-1/6**	**0**	

x هو المرشح للدخول (له أقل قيمة (55/6−)) ، علينا إجراء اختبار النسبة لتحديد العنصر المحوري: $i = 1 \Leftarrow Min\left\{\frac{17*5}{55} = 1.82 , \frac{7*6}{5} = 8.4\right\}$ ، إذن x يكون في موضع A_1 ، الصف المحوري يكون كالتالي:

pivot	1	0	-6/55	1/55	**102/55**

الجدول رقم (3):

CB	Cj	0	0	0	0	الحل
	BV	x	y	S1	S2	$b = x_B$
0	x	1	0	-6/55	1/55	**102/55**
0	y	0	1	1/55	-2/55	**12/11**
	$Z_j = \sum CB_i a_{ij}$	0	0	0	0	Z* =0
	Zj-Cj	0	0	0	0	

بمأن $Z_j - C_j \geq 0$ ، نتوصل إلى الحل النهائي للمرحلة الأولى ، بحيث:
$Max\left(f^*\right) = 0 \ , \ x = \frac{102}{55} \ , y = \frac{12}{11}$.

هنا تنتهي المرحلة (1) لأنه تمت إزالة كل المتغيرات الاصطناعية من الأساس.

المرحلة الثانية:

يتم استخدام الحل المسموح به في نهاية حساب المرحلة (1) كحل أولي أساسي مسموح به للمسألة، يتم تقديم دالة الهدف الأصلية في حساب المرحلة (2)، حيث يتم استخدام طريقة السمبلكس المعتادة لحل المسألة.

الجدول رقم (4):

CB	Cj	-2	-3	0	0	الحل
	BV	x	y	S1	S2	$b = x_B$
-2	x	1	0	-6/55	1/55	**102/55**
-3	y	0	1	1/55	-2/55	**12/11**

	$Z_j = \sum CB_i a_{ij}$	-2	-3	9/55	4/55	Z* =-384/55
	Zj-Cj	0	0	9/55	4/55	

بمأن $Z_j - C_j \geq 0$ ، فأن هذا الجدول يمثل الحل النهائي، والحل الأمثل نجده في عمود الحل، أي: ، $\left\{x = \frac{102}{55} \;,\; y = \frac{12}{11} \;,\; Max\left(Z^*\right) = -\frac{384}{55}\right\}$ أو $\left\{x = \frac{102}{55} \;,\; y = \frac{12}{11} \;,\; Min\left(Z\right) = \frac{384}{55}\right\}$.

تطبيق هذا المثال على برنامج Maple يكون على النحو الاتي:

```
> with(simplex) :
> cnsts := {  10 x + 5 y ≥ 24,    5 x + 30 y ≥ 42 } :
> obj := 2 x +  3 y :

> minimize(obj, cnsts, NONNEGATIVE)
```

$$\left\{x = \frac{102}{55}, y = \frac{12}{11}\right\}$$

```
> objA := (x, y, z) →2 x + 3  y;
```

$$objA := (x, y, z) \mapsto 2x + 3y$$

```
> objA(102/55, 12/11);
```

$$\frac{384}{55}$$

مثال18:

إليك البرنامج الخطي التالي الخاص بمسألة التدنية، المطلوب : إيجاد الحل الأمثل باستخدام طريقة المرحلتين.

$$\begin{aligned}
&\text{Min}(\text{f}) = -9x + 3y - 5z \\
&3x + 9y + 3z \le 60 \\
&6x - 3y + 3z \ge 8 \\
&12x + 9y - 6z = 20 \\
&x, y, z \ge 0
\end{aligned}$$

حل المثال18:

نستخدم الصيغة المكافئة التالية: $Min\sum_{j=1}^{n} c_j x_j = Max\sum_{j=1}^{n}(-c_j)x_j$ ، إذا كانت *f هي القيمة المثلى ، حيث f=−f* فأن:

$$\begin{aligned}
&\text{M}ax(\text{f}^*) = 9x - 3y + 5z \\
&3x + 9y + 3z \le 60 \\
&6x - 3y + 3z \ge 8 \\
&12x + 9y - 6z = 20 \\
&x, y, z \ge 0
\end{aligned}$$

الشكل المعياري يكون كالتالي:

$$\begin{aligned}
&\text{M}ax(\text{f}^*) = 9x - 3y + 5z \\
&3x + 9y + 3z + S_1 = 60 \\
&6x - 3y + 3z - S_2 = 8 \\
&12x + 9y - 6z = 20 \\
&x, y, z, S_1, S_2 \ge 0
\end{aligned}$$

S_1 : متغير وهمي (مكمل)، S_2: متغير وهمي (فائض).

إذا تم وضع $x = y = z = 0$ فأن $S_1 = 60$, $S_2 = -8$ ، لا يمكن هذا لأنه ينافي شرط عدم السالبية لمتغيرات القرار والمتغيرات الوهمية ، نحن بحاجة إلى إضافة متغيرات اصطناعية، فالشكل المعياري يكون كما يلي:

$$Max\left(f^*\right)=9x-3y+5z$$
$$3x+9y+3z+S_1=60$$
$$6x-3y+3z-S_2+A_1=8$$
$$12x+9y-6z+A_2=20$$
$$x,y,z,S_1,S_2,A_1,A_2\geq 0$$

A_1,A_2 متغيرات اصطناعية.

المرحلة الأولى:

في هذه المرحلة يتم إزالة المتغيرات الاصطناعية وإيجاد حل مبدئي مسموح به للمسألة الأصلية، دالة الهدف تكون كما يلي:

$$Max\left(f^*\right)=0x+0y+0z+0S_1+S_2+\left(-A_1\right)+\left(-A_2\right)$$

الجدول رقم (1):

CB	Cj	0	0	0	0	0	-1	-1	الحل
	BV	x	y	z	S1	S2	A1	A2	$b=x_B$
0	S1	3	9	3	1	0	0	0	60
-1	A1	6	-3	3	0	-1	1	0	8
-1	A2	12	9	-6	0	0	0	1	20
	$Z_j=\sum CB_i a_{ij}$	-18	-6	3	0	1	-1	-1	F* =-28
	Zj-Cj	-18	-6	3	0	1	0	0	

X هو المرشح للدخول (له أقل قيمة (-18)) ، علينا إجراء اختبار النسبة لتحديد العنصر المحوري: $i=2\Leftarrow Min\left\{\frac{60}{3}=20,\frac{8}{6}=\frac{4}{3},\frac{20}{12}=\frac{5}{3}\right\}$ ، إذن x يكون في موضع A_1، الصف المحوري يكون كالتالي:

pivot	1	-1/2	1/2	0	-1/6	0	4/3

الجدول رقم (2):

CB	Cj	0	0	0	0	0	-1	الحل
	BV	**x**	**y**	**z**	**S1**	**S2**	**A2**	$b = x_B$
0	**S1**	0	21/2	3/2	1	1/2	0	**56**
0	**x**	1	-1/2	1/2	0	-1/6	1/6	**4/3**
-1	**A2**	0	15	-12	0	2	1	**4**
	$Z_j = \sum CB_i a_{ij}$	**0**	**-15**	**12**	**0**	**-2**	**-1**	
	Zj-Cj	**0**	**-15**	**12**	**0**	**-2**	**0**	**F* =-4**

Y هو المرشح للدخول (له أقل قيمة (-15)) ، علينا إجراء اختبار النسبة لتحديد العنصر المحوري: $\left\{\frac{56}{21/2} = 5.33 , \frac{4}{15} = 0.26\right\} Min \Rightarrow i = 3$ ، إذن y يكون في موضع A_2 ، الصف المحوري يكون كالتالي:

pivot	0	1	-4/5	0	2/15	**4/15**

الجدول رقم (3):

CB	Cj	0	0	0	0	0	الحل
	BV	**x**	**y**	**z**	**S1**	**S2**	$b = x_B$
0	**S1**	0	0	99/10	1	-9/10	**266/5**
0	**x**	1	0	1/10	0	-1/10	**22/15**
0	**y**	0	1	-4/5	0	2/15	**4/15**
	$Z_j = \sum CB_i a_{ij}$	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	
	Zj-Cj	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**F* =0**

بمأن $Z_j - C_j \geq 0$ ، نتوصل إلى الحل النهائي للمرحلة الأولى ، بحيث:
$y = \frac{4}{15}$, $x = \frac{22}{15}$, $Max(f^*) = 0$.

هنا تنتهي المرحلة (1) لأنه تمت إزالة كل المتغيرات الاصطناعية من الأساس.

المرحلة الثانية:

يتم استخدام الحل المسموح به في نهاية حساب المرحلة (1) كحل أولي أساسي مسموح به للمسألة، يتم تقديم دالة الهدف الأصلية في حساب المرحلة (2)، حيث يتم استخدام طريقة السمبلكس المعتادة لحل المسألة.

الجدول رقم (4):

CB	Cj	9	-3	5	0	0	الحل
	BV	x	y	z	S1	S2	$b = x_B$
0	S1	0	0	99/10	1	-9/10	266/5
9	x	1	0	1/10	0	-1/10	22/15
-3	y	0	1	4/5-	0	2/15	4/15
	$Z_j = \sum CB_i a_{ij}$	9	-3	33/10	0	-13/10	F*=
	Zj-Cj	0	0	-17/10	0	-13/10	62/5

z هو المرشح للدخول له أقل قيمة $(-17/10)$ ، علينا إجراء اختبار النسبة لتحديد العنصر المحوري: $i = 1 \Leftarrow Min\left\{\frac{220}{15} = 14.67 , \frac{2660}{495} = 5.37\right\}$ ، إذن z يكون في موضع S_1، الصف المحوري يكون كالتالي:

pivot	0	0	1	10/99	-1/11	532/99

الجدول رقم (5):

CB	Cj	9	-3	5	0	0	الحل
	BV	x	y	z	S1	S2	$b = x_B$
5	z	0	0	1	10/99	-1/11	**532/99**
9	x	1	0	0	-1/99	-1/11	**92/99**
-3	y	0	1	0	8/99	2/33	**452/99**
	$Z_j = \sum CB_i a_{ij}$	**9**	**-3**	**5**	**17/99**	**-16/11**	
	Zj-Cj	**0**	**0**	**0**	**17/99**	**-16/11**	**F*=2132/99**

S2 هو المرشح للدخول له أقل قيمة $(-16/11)$ ، علينا إجراء اختبار النسبة لتحديد العنصر المحوري: مباشرة نستنتج $i=3$ ، إذن **S2** يكون في موضع **y** ، الصف المحوري يكون كالتالي:

pivot	0	33/2	0	4/3	1	**226/3**

الجدول رقم (6):

CB	Cj	9	-3	5	0	0	الحل
	BV	x	y	z	S1	S2	$b = x_B$
5	z	0	3/2	1	2/9	0	**110/9**
9	x	1	3/2	0	1/9	0	**70/9**
0	S2	0	33/2	0	4/3	1	**226/3**
	$Z_j = \sum CB_i a_{ij}$	**9**	**-3**	**5**	**19/9**	**0**	
	Zj-Cj	**0**	**0**	**0**	**19/9**	**0**	**F*=1180/9**

بمأن جميع قيم*f أصبحت موجبة أو صفرية ، فأن هذا الجدول يمثل الحل النهائي، والحل الأمثل نجده في عمود الحل، أي: ،

أو $\left\{x=\frac{70}{9}\ ,\ y=0\ ,\ z=\frac{110}{9}\ ,\ Max\left(f^{*}\right)=\frac{1180}{9}\right\}$

$\left\{x=\frac{70}{9}\ ,\ y=0\ ,\ z=\frac{110}{9}\ ,\ Min\left(f\right)=-\frac{1180}{9}\right\}$.

تطبيق هذا المثال على برنامج Maple يكون على النحو الاتي:

Examples

```
> with(simplex) :
> cnsts := {  3 x + 9 y + 3 z ≤ 60,   6 x − 3 y + 3 z ≥ 8 ,  12  x + 9 y − 6 z = 20} :
> obj := -9 x + 3 y − 5 z :
> minimize(obj, cnsts, NONNEGATIVE)
```

$$\left\{x=\frac{70}{9}, y=0, z=\frac{110}{9}\right\}$$

```
> objA := (x, y, z) → -9 x + 3 y − 5 z;
```

$$objA := (x, y, z) \mapsto -9\,x+3\,y-5\,z$$

```
> objA(70/9, 0, 110/9);
```

$$-\frac{1180}{9}$$

2-4-4 -2 طريقة م الكبرى Big−M Method:

هي نسخة معدلة من طريقة السمبلكس، حيث نخصص قيمة كبيرة جدا (M) لكل من المتغيرات الاصطناعية ، سنوضح ذلك في المثالين التاليين.

مثال19:

إليك البرنامج الخطي التالي الخاص بمسألة التدنية، المطلوب : إيجاد الحل الأمثل باستخدام طريقة م الكبرى.

$$\text{Min } Z = 2x + 3y$$
$$10x + 5y \geq 24$$
$$5x + 30y \geq 42$$
$$x, y \geq 0$$

حل المثال19:

يتم تحويل الشكل السابق إلى الشكل المعياري عن طريق إضافة المتغيرات الوهمية (الفائض)، والمتغيرات الاصطناعية، الشكل المعياري يكون كالتالي:

$$Min(Z) = 2x + 3y + 0S_1 + 0S_2 + MA_1 + MA_2$$
$$10x + 5y - S_1 + A_1 = 24$$
$$5x + 30y - S_2 + A_2 = 42$$
$$x, y, S_1, S_2, A_1, A_2 \geq 0$$

S_1 ، S_2 : متغيرات وهمية (فائض)، A_1, A_2 متغيرات اصطناعية.

نستخدم الصيغة المكافئة التالية: $Min\sum_{j=1}^{n} c_j x_j = Max\sum_{j=1}^{n}(-c_j)x_j$ ، إذا كانت Z* هي القيمة المثلى ، حيث Z=−Z* فأن:

$$Max(Z^*) = -2x - 3y + 0S_1 + 0S_2 - MA_1 - MA_2$$
$$10x + 5y - S_1 + A_1 = 24$$
$$5x + 30y - S_2 + A_2 = 42$$
$$x, y, S_1, S_2, A_1, A_2 \geq 0$$

الجدول رقم (1):

CB	Cj	-2	-3	0	0	-M	-M	الحل
	BV	x	y	S1	S2	A1	A2	$b = x_B$
-M	A1	10	5	-1	0	1	0	24
-M	A2	5	30	0	-1	0	1	42
	$Z_j = \sum CB_i a_{ij}$	-15 M	-35 M	M	M	-M	-M	Z = -66 M
	Zj-Cj	2-15M	3-35M	M	M	0	0	

y هو المرشح للدخول (له أقل قيمة (3-35M)) ، علينا إجراء اختبار النسبة لتحديد العنصر المحوري: $i=2 \Leftarrow Min\left\{\frac{24}{5}= 4.8, \frac{42}{30}= 1.4\right\}$ ، إذن y يكون في موضع A_2 ، الصف المحوري يكون كالتالي:

pivot	1/6	1	0	-1/30	0	7/5

الجدول رقم (2):

CB	Cj	-2	-3	0	0	-M	-M	الحل
	BV	**x**	**y**	**S1**	**S2**	**A1**	**A2**	$b=x_B$
-M	**A1**	55/6	0	-1	1/6	1	-1/6	**17**
-3	**y**	1/6	1	0	-1/30	0	1/30	**7/5**
	$Z_j=\sum CB_i a_{ij}$	$-\frac{55}{6}M$	**-3**	**M**	$-\frac{1}{6}M$	**-M**	$\frac{1}{6}M-\frac{1}{10}$	
	Zj-Cj	$\frac{3}{2}-\frac{55}{6}M$	**0**	**M**	$\frac{1}{10}-\frac{1}{6}M$	**0**	$\frac{7}{6}M-\frac{1}{10}$	$-17M-\frac{21}{5}$

x هو المرشح للدخول (له أقل قيمة ($\frac{3}{2}-\frac{55}{6}M$)) ، علينا إجراء اختبار النسبة لتحديد العنصر المحوري: $i=1 \Leftarrow Min\left\{\frac{17*5}{55}= 1.82 , \frac{7*6}{5}= 8.4\right\}$ ، إذن x يكون في موضع A_1 ، الصف المحوري يكون كالتالي:

pivot	1	0	-6/55	1/55	**102/55**

الجدول رقم (3):

CB	**Cj**	**-2**	**-3**	**0**	**0**	**-M**	**-M**	الحل
	BV	**x**	**y**	**S1**	**S2**	**A1**	**A2**	$b = x_B$
-2	**x**	1	0	-6/55	1/55	6/55	-1/55	**102/55**
-3	**y**	0	1	1/55	-2/55	-1/55	2/55	**12/11**
	$Z_j = \sum CB_i a_{ij}$	**-2**	**-3**	**9/55**	**4/55**	**-9/55**	**-4/55**	
	Zj-Cj	**0**	**0**	**9/55**	**4/55**	$M - \frac{9}{55}$	$M - \frac{4}{55}$	$Z^* = -\frac{384}{55}$

بمأن $Z_j - C_j \geq 0$ ، فأن هذا الجدول يمثل الحل النهائي، والحل الأمثل نجده في عمود الحل، أي: ، $\left\{ x = \frac{102}{55} \ , \ y = \frac{12}{11} \ , \ Max\left(Z^*\right) = -\frac{384}{55} \right\}$ أو $\left\{ x = \frac{102}{55} \ , \ y = \frac{12}{11} \ , \ Min\left(Z\right) = \frac{384}{55} \right\}$.

مثال20:

إليك البرنامج الخطي التالي الخاص بمسألة التدنية، المطلوب : إيجاد الحل الأمثل باستخدام طريقة م الكبرى.

$$\begin{aligned} &\text{Min}\, Z = 4x + 6y \\ &x + 2y \geq 8 \\ &2x + 6y \geq 72 \\ &2x - 2y = 20 \\ &x, y \geq 0 \end{aligned}$$

حل المثال20:

يتم تحويل الشكل السابق إلى الشكل المعياري عن طريق إضافة المتغيرات الوهمية (الفائض)، والمتغيرات الاصطناعية ، الشكل المعياري يكون كالتالي:

$$Min(Z) = 2x + 3y + 0S_1 + 0S_2 + MA_1 + MA_2 + MA_3$$
$$x + 2y - S_1 + A_1 = 8$$
$$2x + 6y - S_2 + A_2 = 72$$
$$2x - 2y + A_3 = 20$$
$$x, y, S_1, S_2, A_1, A_2, A_3 \geq 0$$

S_1 ، S_2 : متغيرات وهمية (فائض)، A_1, A_2, A_3 متغيرات اصطناعية.

نستخدم الصيغة المكافئة التالية: $Min\sum_{j=1}^{n} c_j x_j = Max\sum_{j=1}^{n}(-c_j)x_j$ ، إذا كانت Z* هي القيمة المثلى ، حيث Z=−Z* فأن:

$$Max(Z^*) = -2x - 3y + 0S_1 + 0S_2 - MA_1 - MA_2 - MA_3$$
$$x + 2y - S_1 + A_1 = 8$$
$$2x + 6y - S_2 + A_2 = 72$$
$$2x - 2y + A_3 = 20$$
$$x, y, S_1, S_2, A_1, A_2, A_3 \geq 0$$

الجدول رقم (1):

CB	Cj	-4	-6	0	0	-M	-M	-M	الحل
	BV	x	y	S1	S2	A1	A2	A3	$b = x_B$
-M	A1	1	2	-1	0	1	0	0	8
-M	A2	2	6	0	-1	0	1	0	72
-M	A3	2	-2	0	0	0	0	1	20
	$Z_j = \sum CB_i a_{ij}$	- 6M	-6M	M	M	-M	-M	-M	Z* = -100M
	Zj-Cj	4-6M	6-6M	M	M	0	0	0	

y هو المرشح للدخول (له أقل قيمة (6-6M)) ، علينا إجراء اختبار النسبة لتحديد العنصر المحوري: $i=1 \Leftarrow Min\left\{\frac{8}{2}=4, \frac{72}{6}=12\right\}$ ، إذن y يكون في موضع A_1 ،

الصف المحوري يكون كالتالي:

pivot	1/2	1	-1/2	0	1/2	0	0	4

الجدول رقم (2):

CB	Cj	-4	-6	0	0	-M	-M	-M	الحل
	BV	x	y	S1	S2	A1	A2	A3	$b = x_B$
-6	y	1/2	1	-1/2	0	1/2	0	0	4
-M	A2	-1	0	3	-1	-3	1	0	48
-M	A3	3	0	-1	0	1	0	1	28
	$Z_j = \sum CB_i a_{ij}$	-3-2M	-6	3-2M	M	-3+2M	-M	-M	Z* = -76M-24
	Zj-Cj	1-2M	0	3-2M	M	-3+3M	0	0	

x هو المرشح للدخول (له أقل قيمة (1-2M)) ، علينا إجراء اختبار النسبة لتحديد العنصر المحوري: $i=1 \Leftarrow Min\left\{\frac{4}{1/2}=8, \frac{28}{3}=9.33\right\}$ ، إذن x يكون في موضعy ، الصف المحوري يكون كالتالي:

pivot	1	2	-1	0	1	0	0	8

الجدول رقم (3):

CB	Cj	-4	-6	0	0	-M	-M	-M	الحل
	BV	x	y	S1	S2	A1	A2	A3	$b = x_B$
-4	x	1	2	-1	0	1	0	0	8
-M	A2	0	2	2	-1	-2	1	0	56
-M	A3	0	-6	2	0	-2	0	1	4
	$Z_j = \sum CB_i a_{ij}$	-4	-8+4M	4-4M	M	-4+4M	-M	-M	Z* = -60M-32
	Zj-Cj	0	-2+4M	4-4M	M	-4+5M	0	0	

S1 هو المرشح للدخول (له أقل قيمة (4-4M)) ، علينا إجراء اختبار النسبة لتحديد العنصر المحوري: $Min\left\{\frac{56}{2} = 28 , \frac{4}{2} = 2\right\} \Rightarrow i = 3$ ، إذن S1 يكون في موضع A3 ، الصف المحوري يكون كالتالي:

pivot	0	-3	1	0	-1	0	1/2	**2**

الجدول رقم (4):

CB	Cj	-4	-6	0	0	-M	-M	-M	الحل
	BV	x	y	S1	S2	A1	A2	A3	$b = x_B$
-4	x	1	-1	0	0	0	0	1/2	10
-M	A2	0	8	0	-1	0	1	-1	52
0	S1	0	-3	1	0	-1	0	1/2	2
	$Z_j = \sum CB_i a_{ij}$	-4	4-8M	0	M	0	-M	-2+M	Z* = -52M-40
	Zj-Cj	0	10-8M	0	M	M	0	-2+2M	

y هو المرشح للدخول (له أقل قيمة (10-8M)) ، علينا إجراء اختبار النسبة لتحديد العنصر المحوري: نستنتج مباشرة $i=2$ ، إذن y يكون في موضع A2 ، الصف المحوري يكون كالتالي:

pivot	0	1	0	-1/8	0	1/8	-1/8	**13/2**

الجدول رقم (5):

CB	**Cj**	**-4**	**-6**	**0**	**0**	**-M**	**-M**	**-M**	الحل
	BV	**x**	**y**	**S1**	**S2**	**A1**	**A2**	**A3**	$b=x_B$
-4	**x**	1	0	0	-1/8	0	1/8	3/8	**33/2**
-6	**y**	0	1	0	-1/8	0	1/8	-1/8	**13/2**
0	**S1**	0	0	1	-3/8	-1	3/8	1/8	**43/2**
	$Z_j=\sum CB_i a_{ij}$	**-4**	**-6**	**0**	**5/4**	**0**	**-5/4**	**-3/4**	**Z* = -105**
	Zj-Cj	**0**	**0**	**0**	**5/4**	**M**	**-5/4+M**	**-3/4+M**	

بمأن $Z_j - C_j \geq 0$ ، فأن هذا الجدول يمثل الحل النهائي، والحل الأمثل نجده في عمود الحل، أي: ، $\left\{x=\frac{33}{2}\ ,\ y=\frac{13}{2}\ ,\ Max\left(Z^*\right)=-105\right\}$ أو $\left\{x=\frac{33}{2}\ ,\ y=\frac{13}{2}\ ,\ Min\left(Z\right)=105\right\}$.

تطبيق هذا المثال على برنامج Maple يكون على النحو الاتي:

```
> with(simplex) :
> cnsts := {  x + 2y ≥ 8,  2x + 6y ≥ 72 , 2x-2y = 20} :
> obj := 4x +  6y :

> minimize(obj, cnsts, NONNEGATIVE)
```

$$\left\{x = \frac{33}{2}, y = \frac{13}{2}\right\}$$

```
> objA := (x, y, z) → 4x +  6y;
```

$$objA := (x, y, z) \mapsto 4x + 6y$$

```
> objA(33/2, 13/2);
```

$$105$$

2-4-5- حالات خاصة في طريقة السمبلكس:

هناك حالات خاصة قد تواجهنا عند استخدام طريقة simplex، وجب التطرق إليها نظرا لأهميتها، نلخصها فيما يلي:

حلول غير موجودة No Feasible Solutions

حلول غير محدودة Unbounded solutions

التفسخ (حالة غير نظامية): Degeneracy

الحل البديل Alternative solution

أولا : حلول غير موجودة: No Feasible Solutions

في حالة وجود متغيرين يمكن توضيح ذلك بيانيا بحالة عدم وجدود حل، أما في حالة المسائل التي تتضمن أكثر من متغيرين فأنه يمكن تحديد هذه الحالة في الحل الأمثل الذي يتضمن وجود متغيرات اصطناعية (أي كمتغيرات أساسية غير صفرية)، في مثل هذه الحالة لا يمكن إخراج المتغير الاصطناعي من الأساس، وبالتالي فإن منطقة الحلول المسموح بها هي مجموعة خالية.

مثال 21:

$$\begin{aligned} &Min\ Z = 5x + 2y \\ &-3x + 3y \geq 6 \\ &3x + 3y \leq 3 \\ &x, y \geq 0 \end{aligned}$$

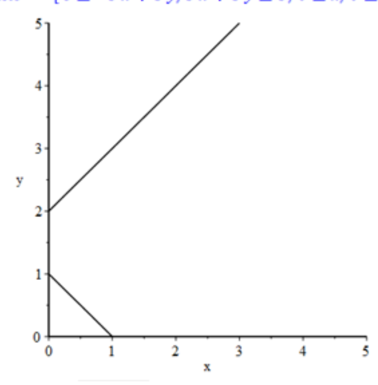
حل المثال21:

لنوضح ذلك بيانيا ثم نستخدم طريقة م. الكبرى.

أ-

يانيا:

```
with(plots) : cnsts := [ -3 x + 3 y ≥ 6,   3 x + 3 y ≤ 3, 0 ≤ x, 0 ≤ y] ;
feasibleRegion := inequal(cnsts, x = 0 ..5, y = 0 ..5, optionsexcluded = (colour = white)) : display(feasibleRegion)
cnsts := [6 ≤ -3 x + 3 y, 3 x + 3 y ≤ 3, 0 ≤ x, 0 ≤ y]
```



ب-طريقة م. الكبرى

يتم تحويل الشكل السابق إلى الشكل المعياري عن طريق إضافة المتغيرات الوهمية (الفائض والمكملة)، والمتغيرات الاصطناعية ، الشكل المعياري يكون كالتالي:

$$\begin{aligned} &Min(Z) = 5x + 2y + 0S_1 + 0S_2 + MA_1 \\ &-3x + 3y - S_1 + A_1 = 6 \\ &3x + 3y + S_2 = 3 \\ &x, y, S_1, S_2, A_1 \geq 0 \end{aligned}$$

S_1 ، S_2 : متغيرات وهمية (فائض ، مكملة)، A_1 متغير اصطناعي.

نستخدم الصيغة المكافئة التالية: $Min\sum_{j=1}^{n} c_j x_j = Max\sum_{j=1}^{n}(-c_j)x_j$ ، إذا كانت *Z هي القيمة المثلى ، حيث *Z=−Z فأن:

$$Max(Z^*) = -5x - 2y + 0S_1 + 0S_2 - MA_1$$
$$-3x + 3y - S_1 + A_1 = 6$$
$$3x + 3y + S_2 = 3$$
$$x, y, S_1, S_2, A_1 \geq 0$$

الجدول رقم (1):

CB	Cj	-5	-2	0	0	-M	الحل
	BV	x	y	S1	S2	A1	$b = x_B$
-M	A1	-3	3	-1	0	1	6
0	S2	3	3	0	1	0	3
	$Z_j = \sum CB_i a_{ij}$	3M	-3M	M	0	-M	Z* = -6M
	Zj-Cj	3M+5	2-3M	M	-M	0	

y هو المرشح للدخول (له أقل قيمة (2-3M)) ، علينا إجراء اختبار النسبة لتحديد العنصر المحوري: $i = 2 \Leftarrow Min\left\{\frac{6}{3} = 2, \frac{3}{3} = 1\right\}$ ، إذن y يكون في موضع S_2،

الصف المحوري يكون كالتالي:

pivot	1	1	0	1/3	0	1

الجدول رقم (2):

CB	Cj	-5	-2	0	0	-M	الحل
	BV	x	y	S1	S2	A1	$b = x_B$
-M	A1	-6	0	-1	-1	1	3
-2	y	1	1	0	1/3	0	1
	$Z_j = \sum CB_i a_{ij}$	-2+6M	-2	M	-2/3	+M	Z* = -2-3M
	Zj-Cj	3+6M	0	M	-2/3 +M	0	

نلاحظ أن $Z_j - C_j \geq 0$ ، فأن هذا الجدول يمثل الحل النهائي، وبمأن قيمة *Z تعتمد على قيمة M فنستنتج أنه لا توجد حلول.

ثانيا: حلول غير محدودة Unbounded solutions

تخص هذه الحالة دالة التعظيم Max ، أما في حالة دالة التدنية Min فالحل موجود.

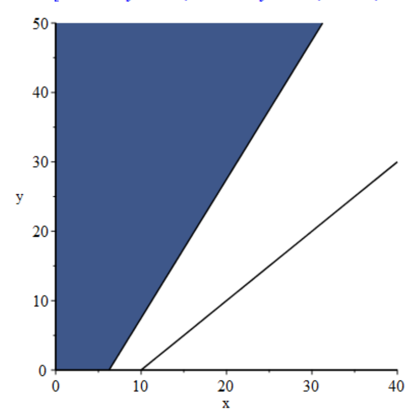
مثال22:

$$Max\ Z = 5x + 2y$$
$$4x - 4y \leq 40$$
$$8x - 4y \leq 50$$
$$x, y \geq 0$$

حل المثال22:

أ- بيانيا:

```
with(plots) : cnsts := [ 4 x − 4 y ≤ 40,   8 x − 4 y ≤ 50, 0 ≤ x, 0 ≤ y] ;
feasibleRegion := inequal(cnsts, x = 0 ..40, y = 0 ..50, optionsexcluded = (colour = white)) : display(feasibleRegion)
cnsts := [4 x − 4 y ≤ 40, 8 x − 4 y ≤ 50, 0 ≤ x, 0 ≤ y]
```



ب – طريقة السمبلكس:

يتم تحويل الشكل السابق إلى الشكل المعياري عن طريق إضافة المتغيرات الوهمية (الفائض)، الشكل المعياري يكون كالتالي:

$$Max\ Z = 5x + 2y + 0S_1 + 0S_2$$
$$4x - 4y + S_1 = 40$$
$$8x - 4y + S_2 = 50$$
$$x, y, S_1, S_2 \geq 0$$

S_1 ، S_2 : متغيرات وهمية (مكملة).

الجدول رقم (1):

CB	Cj	5	2	0	0	الحل
	BV	x	y	S1	S2	$b = x_B$
0	S1	4	-4	1	0	**40**
0	S2	8	-4	0	1	**50**
	$Z_j = \sum CB_i a_{ij}$	**0**	**0**	**0**	**0**	
	Zj-Cj	**-5**	**-2**	**0**	**0**	**Z=0**

x هو المرشح للدخول (له أقل قيمة (**-5**)) ، علينا إجراء اختبار النسبة لتحديد العنصر المحوري: $i = 2 \Leftarrow Min\left\{\frac{50}{8} = 6.25, \frac{40}{4} = 10\right\}$ ، إذن x يكون في موضع S_2،

الصف المحوري يكون كالتالي:

pivot	1	-1/2	0	1/8	**25/4**

الجدول رقم (2):

CB	Cj	5	2	0	0	الحل
	BV	x	y	S1	S2	$b = x_B$
0	S1	0	-2	1	-1/2	**15**
5	x	1	-1/2	0	1/8	**25/4**
	$Z_j = \sum CB_i a_{ij}$	**5**	**0**	**0**	**0**	
	Zj-Cj	**0**	**-9/2**	**0**	**5/8**	**Z=125/4**

y هو المرشح للدخول (له أقل قيمة (**-9/2**)) ، علينا إجراء اختبار النسبة لتحديد العنصر المحوري ، لكن لا يمكننا اجراء اختبار النسبة نظرا لاستحالة خروج أي

متغير من متغيرات الأساس (شرط عدم القسمة على عدد سالب)، وبالتالي نستنتج أنه يوجد عدد غير محدود من الحلول Infinite Number of Optimal Solutions.

ثالثا: التفسخ (حالة غير نظامية): Degeneracy

في بعض الحالات، قد يكون هناك غموض في اختيار المتغير الذي يجب إدخاله في الأساس ، أي أن هناك علاقة بين نسبة الاستبدال لمتغيرين (تساوي النسبتين)، لحل هذه المشكلة نختار متغير واحدا بشكل اعتباطي، لنوضح ذلك في المثال التالي:

مثال23:

$$\begin{aligned} &Max\ Z = x + 3y \\ &4x + 16y \le 32 \\ &4x + 8y \le 16 \\ &x, y \ge 0 \end{aligned}$$

حل المثال23:

يتم تحويل الشكل السابق إلى الشكل المعياري عن طريق إضافة المتغيرات الوهمية (الفائض)، الشكل المعياري يكون كالتالي:

$$\begin{aligned} &Max\ Z = x + 3y + 0S_1 + 0S_2 \\ &4x + 16y + S_1 = 32 \\ &4x + 8y + S_2 = 16 \\ &x, y, S_1, S_2 \ge 0 \end{aligned}$$

S_1 ، S_2 : متغيرات وهمية (مكملة).

الجدول رقم (1):

CB	Cj	1	3	0	0	الحل
	BV	x	y	S1	S2	$b = x_B$
0	S1	4	16	1	0	32
0	S2	4	8	0	1	16
	$Z_j = \sum CB_i a_{ij}$	0	0	0	0	Z=0
	Zj-Cj	-1	-3	0	0	

y هو المرشح للدخول (له أقل قيمة (-3)) ، علينا إجراء اختبار النسبة لتحديد العنصر المحوري: $Min\left\{\frac{32}{16} = 2, \frac{16}{8} = 2\right\} \Rightarrow i = 1 \vee 2$ ، نختار $i = 1$ ، إذن y يكون في موضع S_1، الصف المحوري يكون كالتالي:

pivot	1/4	1	1/16	0	**2**

الجدول رقم (2):

CB	Cj	1	3	0	0	الحل
	BV	**x**	**y**	**S1**	**S2**	$b = x_B$
3	**y**	1/4	1	1/16	0	**2**
0	**S2**	2	0	-1/2	1	**0**
	$Z_j = \sum CB_i a_{ij}$	**3/4**	**2**	**3/16**	**0**	**Z=6**
	Zj-Cj	**-1/4**	**0**	**3/16**	**0**	

X هو المرشح للدخول (له أقل قيمة (**-1/4**)) ، علينا إجراء اختبار النسبة لتحديد العنصر المحوري:

: $Min\left\{\frac{2}{1/4} = 8, \frac{0}{2} = 0\right\} \Rightarrow i = 2$ ، نختار $i = 1$ ، إذن x يكون في موضع S_2،

الصف المحوري يكون كالتالي:

pivot	1	0	-1/4	1/2	**0**

الجدول رقم (3):

CB	Cj	1	3	0	0	الحل
	BV	**x**	**y**	**S1**	**S2**	$b = x_B$
3	**y**	0	1	1/8	-1/8	**2**
1	**x**	1	0	-1/4	1/2	**0**

	$Z_j = \sum CB_i a_{ij}$	1	3	1/8	1/8	Z=6
	Zj-Cj	0	0	1/8	1/8	

بمأن $Z_j - C_j \geq 0$ ، فأن هذا الجدول يمثل الحل النهائي، والحل الأمثل نجده في عمود الحل، أي: $\{x = 0 \ , \ y = 2 \ , \ Max(Z) = 6\}$، نلاحظ من خلال الجدولين 2 و3 أن قيمة Z لم تتغير.

رابعا: الحل البديل Alternative solution

في هذه الحالة هناك أكثر من حل، بحيث تظل قيمة Z نفسها مع اختلاف قيم متغيرات القرار، لنوضح ذلك في المثال التالي:

مثال24:

$$\begin{aligned} &Max\ Z \ = \ 6x + 12y \\ &3x + 6y \leq 15 \\ &3x + 3y \leq 12 \\ &x, y \geq 0 \end{aligned}$$

حل المثال24:

يتم تحويل الشكل السابق إلى الشكل المعياري عن طريق إضافة المتغيرات الوهمية (الفائض)، الشكل المعياري يكون كالتالي:

$$\begin{aligned} &Max\ Z \ = \ 6x + 12y + 0S_1 + 0S_2 \\ &3x + 6y + S_1 = 15 \\ &3x + 3y + S_2 = 12 \\ &x, y, S_1, S_2 \geq 0 \end{aligned}$$

S_1 ، S_2 : متغيرات وهمية (مكملة).

الجدول رقم (1):

CB	Cj	6	12	0	0	الحل
	BV	x	y	S1	S2	$b = x_B$
0	S1	3	6	1	0	15

0	**S2**	3	3	0	1	**12**
	$Z_j = \sum CB_i a_{ij}$	**0**	**0**	**0**	**0**	
	Zj-Cj	**-6**	**-12**	**0**	**0**	**Z=0**

y هو المرشح للدخول (له أقل قيمة (**-12**)) ، علينا إجراء اختبار النسبة لتحديد العنصر المحوري: $Min\left\{\frac{15}{6} = 2.5, \frac{12}{3} = 4\right\} \Rightarrow i=1$ ، نختار $i=1$ ، إذن y يكون في موضع S_1، الصف المحوري يكون كالتالي:

pivot	1/2	1	1/6	0	**5/2**

الجدول رقم (2):

CB	**Cj**	**6**	**12**	**0**	**0**	الحل
	BV	**x**	**y**	**S1**	**S2**	$b = x_B$
12	**y**	1/2	1	1/6	0	**5/2**
0	**S2**	3/2	0	-1/2	1	**9/2**
	$Z_j = \sum CB_i a_{ij}$	**6**	**12**	**2**	**0**	**Z=30**
	Zj-Cj	**0**	**0**	**2**	**0**	

بمأن $Z_j - C_j \geq 0$ ، فأن هذا الجدول يمثل الحل النهائي، والحل الأمثل نجده في عمود الحل، أي: $\left\{x=0\ ,\ y=2\ ,\ S_1=\frac{9}{2}\ ,\ Max(Z)=30\right\}$، بمأن قيمة x في دالة الهدف تساوي 0 ، لنستبدل قيمة S2 بـ x فيتشكل الجدول التالي:

الجدول رقم (3):

CB	**Cj**	**6**	**12**	**0**	**0**	الحل
	BV	**x**	**y**	**S1**	**S2**	$b = x_B$
12	**y**	0	1	1/3	-1/3	**1**

6	**x**	1	0	-1/3	2/3	**3**
	$Z_j = \sum CB_i a_{ij}$	**6**	**12**	**2**	**0**	**Z=30**
	Zj-Cj	**0**	**0**	**2**	**0**	

بمأن $Z_j - C_j \geq 0$ ، فأن هذا الجدول كذلك يمثل الحل النهائي، والحل الأمثل نجده في عمود الحل، أي: $\{x=3\ ,\ \ y=1\ ,\ \ \ Max(Z)=30\}$، من خلال الجدولين (2) و (3) يتضح أن هناك حلين يحققان نفس القيمة المثلى وهما:

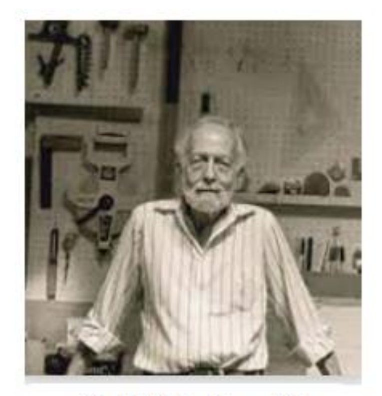
الحل الأول: $\{x=0\ ,\ \ y=2\ ,\ Z=30\}$

الحل الثاني: $\{x=3\ ,\ \ y=1\ ,\ \ \ Z=30\}$

الأعلام المذكورة في الفصل الثاني:



جورج برنارد دانتزيغ
George Bernard Dantzig
1914 - 2005



فيليب ستار "فيل" وولف
Philip Starr "Phil" Wolfe
(2016 -1927)

الفصل الثالث : النموذج الثنائي(المقابل) وتحليل الحساسية The Duality form and sensitivity Analysis

3-1- النموذج الثنائي (المقابل):

هناك طريقتان لحل مسألة الأمْثَلة وهما النموذج الأولي primal Model و النموذج المقابل Dual Model، حيث يقترنان دائما مع بعضهما البعض ، يستخدم النموذج المقابل في كثير من الأحيان نظرا لسهولته و عندما يصعب حل النموذج الأولي، وله نتائج بعيدة المدى في التطبيقات الاقتصادية مما يساعد المديرين في الوصول إلى مسارات عمل بديلة ، لذلك فهو يوفر تقنية جبرية فعالة تعزز دراسة السلوك الديناميكي لمسائل التحسين.

تم تخمين نظرية نموذج المقابل من طرف جون فون نيومانJohn von Neumann [1]

مباشرة بعد عرض Dantzig لمسألة البرمجة الخطية، فون نيومان استخدم معلومات من نظرية في الألعاب التي قدمها سنة 1928، ثم طورها Gale[1] وKuhn[2] و

[1]- **جون فون نيومانJohn von Neumann (1903 – 1957)** ، رياضياتي مجري – أمريكي ، ولد في بودابيست و توفي في الولايات المتحدة الأمريكية ، يعتبر كذلك كفيزيائي، وعالم حاسوب، ومهندسا، وموسوعيا، أعتُبر فون نيومان عموما الرياضياتي الأبرز في زمانه، وقيل أنه « أخر ممثل للرياضياتيين العظماء »، دمج بين العلوم البحتة والتطبيقية، قدم نيومان إسهامات كبرى في العديد من الميادين (أُسس الرياضيات، والتحليل الدالي، ونظرية إرجوديك ergodic theory ، ونظرية الزمر، ونظرية التمثيل، و المؤثرات الجبرية ، والهندسة الرياضية، والطوبولوجيا، والتحليل العددي)، والفيزياء (ميكانيكا الكم، وجريان الموائع (الهيدرو ديناميك)، وميكانيكا الكم الإحصائية، والاقتصاد (نظرية الألعاب)، والحوسبة (هيكلة فون نيومان، والبرمجة الخطية، والآلات المتضاعفة ذاتيًا، والحوسبة الستوكاستيكية (العشوائية)، والإحصاء، كان رائدا في تطبيق نظرية المؤثرات على ميكانيكا الكم في تطوير التحليل الدالي، وشخصية رئيسة في تطوير نظرية الألعاب ومفاهيم الأتمتة الخلوية، والبنّاء الشامل والحاسوب الرقمي.

Tucker[3] في سنة 1951، تم تعريف الخصائص الأساسية لمسائل الثنائية من قبل Goldman و Tucker في سنة 1956.

3-1-1- ميكانيزمات النموذج لمقابل:

يمكن توضيحه كما يلي:

النموذج الأولي

$$Max\ Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad ; \ i = 1, 2, \ldots m$$

$$x_j \geq 0 \quad ; \ j = 1, 2, \ldots, n$$

النموذج المقابل

$$Min\ W = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j \quad ; \ j = 1, 2, \ldots n$$

$$y_i \geq 0 \quad ; \ i = 1, 2, \ldots, m$$

ملاحظة 1: بنفس الكيفية في حالة وجود دالة التدنية في النموذج الأولي (يترك للقارئ وضعها).

ملاحظة2: إذا كانت دالة الهدف دالة تعظيم ، فيجب أن تكون كل القيود كلها أقل أو يساوي(≤) ، وإذا كانت دالة تدنية فيجب أن تكون كل القيود أكبر من أو يساوي (≥).

مثال1:

[1] - **ديفيد جيل (David Gale 2008 – 1921)** رياضياتي واقتصادي أمريكي، تشمل مساهمات Gale في الاقتصاد الرياضي دليلا مبكرا على وجود توازن المنافسة ، وحله لمسألة Ramsey من الناحية النظرية للنمو الأمثل. بدأ Gale و F. M. Stewart دراسة الألعاب اللانهائية بمعلومات مثالية، أدى هذا العمل إلى مساهمات أساسية في المنطق الرياضي.

[2] - **هارولد ويليام كون Harold William Kuhn 1925 – 2014** رياضياتي واقتصادي أمريكي، نشر العديد من الكتب بما في ذلك الكتب المؤسسة (الأساسية) في البرمجة غير الخطية مع ألبرت تاكر في سنة 1951 ، ثم مساهمات في نظرية الألعاب في عام 1976. حصل على جائزة جون فون نيومان مع ألبرت تاكر في سنة 1980.

[3] - **ألبرت ويليام تاكر Albert William Tucker 1905 - 1995** رياضياتي أمريكي من أصل كندي قدم مساهمات مهمة في الطوبولوجيا ونظرية الألعاب والأمْثَلة غير الخطية.

أوجد النموذج المقابل للنموذج الأولي التالي:

$$\begin{aligned} &Max\ Z = 3x + 4y \\ &5x + 4y \leq 8 \\ &2x + 7y \leq 10 \\ &x, y \geq 0 \end{aligned}$$

حل المثال 1:

النموذج المقبل يكون على النحو الاتي:

$$\begin{aligned} &Min\ W = 8z_1 + 10z_2 \\ &5z_1 + 2z_2 \geq 3 \\ &4z_1 + 7y_2 \geq 4 \\ &z_1, z_2 \geq 0 \end{aligned}$$

التطبيق على برنامج Maple :

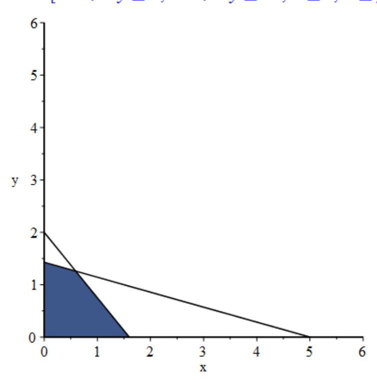
$with(simplex)$:

$dual(3\,x + 4\,y,\ \{5\,x + 4\,y \leq 8,\ 2\,x + 7\,y \leq 10\},\ z)$

$$10\,z1 + 8\,z2,\ \{3 \leq 2\,z1 + 5\,z2,\ 4 \leq 7\,z1 + 4\,z2\}$$

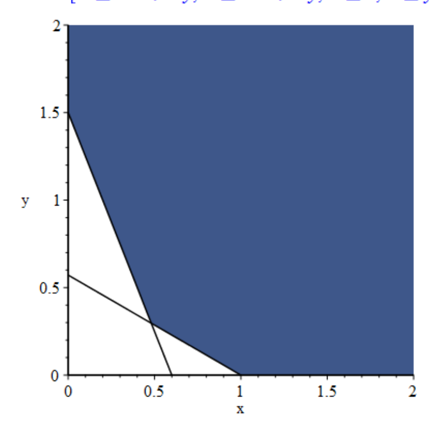
التمثيل البياني للبرنامج الاولي (باستخدام برنامج Maple):

```
with(plots) : cnsts := [ 5x + 4y ≤ 8,   2x + 7y ≤ 10, 0 ≤ x, 0 ≤ y] ;
feasibleRegion := inequal(cnsts, x = 0 ..6, y = 0 ..6, optionsexcluded = (colour = white)) : display(feasibleRegion)
cnsts := [5x + 4y ≤ 8, 2x + 7y ≤ 10, 0 ≤ x, 0 ≤ y]
```



التمثيل البياني للبرنامج المقابل (باستخدام برنامج Maple):

```
with(plots) : cnsts := [ 5x + 2y ≥ 3,   4x + 7y ≥ 4, 0 ≤ x, 0 ≤ y] ;
feasibleRegion := inequal(cnsts, x = 0 ..2, y = 0 ..2, optionsexcluded = (colour = white)) : display(feasibleRegion)
cnsts := [3 ≤ 5x + 2y, 4 ≤ 4x + 7y, 0 ≤ x, 0 ≤ y]
```



مثال2:

أوجد النموذج المقابل للنموذج الأولي التالي:

$$
\begin{aligned}
&Max\ Z = 8x_1 + 10x_2\\
&x_1 \le 9\\
&3x_2 \le 15\\
&7x_1 + 5x_2 \le 29\\
&x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

ثم قدم الشكل المصفوفي للنموذجين .

حل المثال2:

النموذج المقبل يكون على النحو الاتي:

$$
\begin{aligned}
&Min\ W = 9y_1 + 15y_2 + 29y_3\\
&y_1 + 7y_3 \ge 8\\
&3y_2 + 5y_3 \ge 10\\
&y_1, y_2, y_3 \ge 0
\end{aligned}
$$

الشكل المصفوفي للنموذج الأولي:

$$
\begin{aligned}
&Max\ Z = \begin{bmatrix} 8 & 10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\\
&\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} 9 \\ 15 \\ 29 \end{bmatrix}\\
&\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \ge \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

الشكل المصفوفي للنموذج المقابل:

$$Min\ W = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 9 \\ 15 \\ 29 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 8 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

مثال3:

أوجد النموذج المقابل للنموذج الأولي التالي:

$$\begin{aligned}
&Max\ Z = 20x_1 + 5x_2 - 7x_3 \\
&4x_1 - 8x_2 + 5x_3 \leq 30 \\
&2x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 40 \\
&-x_1 + 7x_2 + 10x_3 \geq 15 \\
&x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}$$

حل المثال3:

عدد القيود ثلاثة، فعدد المتغيرات في دالة الهدف W تكون ثلاثة، دالة الهدف هي دالة تعظيم فيجب وضع كل القيود أقل أو تساوي، إذن:

$$\begin{aligned}
&Max\ Z = 20x_1 + 5x_2 - 7x_3 \\
&4x_1 - 8x_2 + 5x_3 \leq 30 \\
&-2x_1 - 2x_2 - x_3 \leq -40 \\
&x_1 - 7x_2 - 10x_3 \leq -15 \\
&x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}$$

النموذج المقبل يكون على النحو الاتي:

$$
\begin{aligned}
&Min\ W = 30y_1 - 40y_2 - 15y_3 \\
&4y_1 - 2y_2 + y_3 \geq 20 \\
&-8y_1 - 2y_2 - 7y_3 \geq 5 \\
&5y_1 - y_2 - 10y_3 \geq -7 \\
&y_1, y_2, y_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

مثال4:

أوجد النموذج المقابل للنموذج الأولي التالي:

$$
\begin{aligned}
&Min\ Z = 3x_1 + 6x_2 \\
&-6x_1 + 12x_2 \leq 100 \\
&2x_1 - 2x_2 = 40 \\
&2x_1 + x_2 \geq 160 \\
&x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

حل المثال4:

أولا: لتحويل هذا النموذج إلى النموذج المقابل يجب أن تكون كل القيود أكبر أو تساوي(دالة الهدف هي دالة تدنية) ، ثانيا: بخصوص القيد الثاني $2x_1 - 2x_2 = 40$ يمكن أن نعبر عنه بدلالة القيدين التاليين:

$$
\begin{cases}
2x_1 - 2x_2 \geq 40 \\
2x_1 - 2x_2 \leq 40
\end{cases}
$$

وحيث أن دالة الهدف هي Min ، فأن القيد $2x_1 - 2x_2 \leq 40$ سيضرب في (-1) أي: $-2x_1 + 2x_2 \geq -40$.

نعيد كتابة النموذج الأولي كما يلي:

$$
\begin{aligned}
&Min\ Z = 3x_1 + 6x_2 \\
&6x_1 - 12x_2 \geq -100 \\
&2x_1 - 2x_2 \geq 40 \\
&-2x_1 + 2x_2 \geq -40 \\
&2x_1 + x_2 \geq 160 \\
&x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

النموذج المقابل للنموذج الأولي يكون كما يلي:

$$
\begin{aligned}
&Max\ W = -100y_1 + 40y_2 - 40y_3 + 160y_4 \\
&6y_1 + 2y_2 - 2y_3 + 2y_4 \leq 3 \\
&-12y_1 - 2y_2 + 2y_3 + y_4 \leq 6 \\
&y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0
\end{aligned}
$$

بوضع $y = y_2 - y_3 \left(y_2, y_3 \geq 0 \right)$ يصبح النموذج كالتالي علما أن y تكون غير محددة الاشارة (unrestricted in sign) :

$$
\begin{aligned}
&Max\ W = -100y_1 + 40y + 160y_4 \\
&6y_1 + 2y + 2y_4 \leq 3 \\
&-12y_1 - 2y + y_4 \leq 6 \\
&y_1, y_2 \geq 0\ \ ,\ y:\ unrestrictedin\ sign
\end{aligned}
$$

3-1-2- أهمية البرنامج المقابل في إدارة الأعمال:

يوفر لنا البرنامج المقابل معلومات مهمة حول قيمة الموارد، حيث أن التحليل الاقتصادي مطلوب في اتخاذ القرار ما إذا كانت هناك حاجة إلى وحدات إضافية من أي مورد، فإذا كانت الإجابة بنعم ، فكم يكون مقدار التكلفة لكل وحدة مطلوب دفعها مقابل أي مورد.

تتلخص أهمية دراسة البرنامج المقابل في الآتي:

القيد الأيمن في البرنامج الأولي يمثل كمية المورد المتاح وقيمة المتغير المقابل المصاحب يتم تفسيرها على أنها الحد الأقصى المحتمل للمبلغ الذي يتم دفعه مقابل وحدة إضافية من هذا المورد.

إذن يرتبط هذا بدراسة التكاليف الهامشية (الحدية)، والهدف من التحليل الهامشي هو معرفة التكلفة أو الموافقة على إنتاج أو بيع وحدات إضافية، والغرض منه هو قياس هذه التأثيرات المتوقعة على حالة المؤسسة والعواقب التي ستواجهها مستقبلا، دون أن ننسى تمكين المؤسسة من صنع القرار السليم.

تطبيق:

تقوم ورشة (خلال أسبوع) بتصنيع مكاتب وطاولات وكراسي باستخدام: الخشب ولوازم وساعات العمل، مع العلم أن إنجاز طاولة واحدة يتطلب 4 متر من الخشب و 5 كلغ من اللوازم و 3 ساعات من العمل، ويتطلب انجاز مكتب واحد 5 متر من الخشب و 6 كلغ من اللوازم و 4 ساعات من العمل، كما يتطلب إنجاز كرسي واحد 2 متر من الخشب و 2 كلغ من اللوازم و ساعة من العمل، مخزن هذه الورشة يحوي على: 200 متر من الخشب و 150 كلغ من اللوازم كما أن الميزانية المخصصة لتسديد أجرة العمال لها قدرة على تسديد 50 ساعة ، تحقق المنتجات المصنعة ربحا قدره 15 و. ن لكل طاولة مباعة، و20 و. ن لكل مكتب مباع و 10 و. ن لكل كرسي يتم بيعه.

نفرض أن كل الانتاج تم بيعه.

المطلوب:

1- إيجاد صياغة للمسألة ، وإيجاد الحل بطريقة السمبلكس.

2- نفرض أن تاجر أراد شراء منتجات هذه الورشة، ما هي الأسعار التي يجب تحديدها مقابل الموارد التي تغري صاحب الورشة لكي يوافق على البيع(تقديم النموذج المقابل).

حل التطبيق :

نلخص المعطيات السابقة في الجدول التالي:

	طاولة	مكتب	كرسي	الموارد المتاحة
الخشب	4	5	2	200
اللوازم	5	6	2	150
ساعات العمل	3	4	1	50
الربح	15	20	10	

1- نفرض أن x_1 تمثل الكمية المباعة للطاولات ، و x_2 الكمية المباعة للطاولات ، و x_3 الكمية المباعة للكراسي ، تكون صياغة النموذج على النحو الاتي:

$$Max\ Z = 15x_1 + 20x_2 + 10x_3$$
$$ST$$
$$4x_1 + 5x_2 + 2x_3 \leq 200$$
$$5x_1 + 6x_2 + 2x_3 \leq 150$$
$$3x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 50$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

إيجاد الحل بطريقة السمبلكس نلخصه في الجداول التالية:

الجدول(1):

CB	Cj	15	20	10	0	0	0	الحل
	BV	x1	x2	x3	S1	S2	S3	$b = x_B$
0	S1	4	5	2	1	0	0	200
0	S2	5	6	2	0	1	0	150
0	S3	3	4	1	0	0	1	50
	$Z_j = \sum CB_i a_{ij}$	0	0	0	0	0	0	
	Zj-Cj	-15	-20	-10	0	0	0	Z=0

الجدول(2):

CB	Cj	15	20	10	0	0	0	الحل
	BV	x1	x2	x3	S1	S2	S3	$b = x_B$
0	S1	1/4	0	3/4	1	0	-5/4	275/2
0	S2	1/2	0	1/2	0	1	-3/2	75
20	X2	3/4	1	1/4	0	0	1/4	25/2
	$Z_j = \sum CB_i a_{ij}$	15	20	5	0	0	5	
	Zj-Cj	0	0	-5	0	0	5	Z= 250

الجدول(3):

CB	Cj	15	20	10	0	0	0	الحل
	BV	x1	x2	x3	S1	S2	S3	$b = x_B$
0	S1	-2	-3	0	1	0	-2	100
0	S2	-1	-2	0	0	1	-2	50
10	X3	3	4	1	0	0	1	50
	$Z_j = \sum CB_i a_{ij}$	30	40	10	0	0	10	
	Zj-Cj	15	20	0	0	0	10	Z= 500

بمأن $Z_j - C_j \geq 0$ ، فأن هذا الجدول يمثل الحل النهائي، والحل الأمثل نجده في عمود الحل، أي: ، $\{x_1 = x_2 = 0 \,,\ x_3 = 50 \,,\ S_1 = 100 \,,\ S_2 = 50 \,,\ Max(Z) = 500\}$.

2- نلاحظ أن موارد ساعات العمل قد تم استغلالها بالكامل لأن $(S_3 = 0)$، بينما موارد الخشب واللوازم لم تستغل بالكامل $(S_1, S_2 \neq 0)$.

إذا كان لدينا متر إضافي من الخشب أو كلغ واحد من اللوازم أو ساعة من العمل ، فما هو الربح الاضافي ؟ هذا هو مفهوم التكلفة الهامشية (الحدية) ، سيتم توضيحها في الفقرة الموالية.

لنرمز إلى:

y_1 : التكلفة الهامشية لمتر واحد من الخشب.

y_2 : التكلفة الهامشية لكلغ واحد من اللوازم.

y_3 : التكلفة الهامشية لساعة واحدة من اليد العاملة.

لننوه إلى أمر مهم، وهو أنه يجب أن يكون ($y_1 = y_2 = 0$) لأن موردي الخشب واللوازم لم تستغل بالكامل.

دعونا الأن إلقاء نظرة من وجهة التاجر الذي يقوم بشراء منتجات هذه الورشة، من الأفضل تفسير التكاليف الهامشية على النحو الاتي:

حجم الانتاج الأمثل اقتصاديا يتحقق عند مساواة التكلفة الهامشية مع سعر بيع الوحدوي، وعليه فإن:

y_1 : سعر الوحدة الواحدة من الخشب.

y_2 : سعر الوحدة الواحدة من اللوازم.

y_3 : سعر الوحدة الواحدة من اليد العاملة.

ماهي المسألة التي سيتم حلها في تحديد هذه المتغيرات ؟

تتوافق دالة الهدف مع تكلفة الدفع للشراء $W = 200y_1 + 150y_2 + 50y_3$، يتعلق الأمر بتقليل (تدنية) السعر الذي يجب دفعه.

لهذا سيتم قبول عرض هذا التاجر إذا تم تقديم على الأقل قدر ربح كل منتج:

الطاولات: ربح طاولة هو:

$$4y_1 + 5y_2 + 3y_3 \geq 15$$

المكاتب: ربح مكتب هو:

$$5y_1+6y_2+4y_3 \geq 20$$

الكراسي: ربح كرسي هو:

$$2y_1+2y_2+y_3 \geq 10$$

ملخص كل هذا نعرضه في النموذج المقابل:

فالنموذج المقابل يكون على النحو الاتي:

$$Min\ W = 200y_1+150y_2+50y_3$$
$$ST$$
$$4y_1+5y_2+3y_3 \geq 15$$
$$5y_1+6y_2+4y_3 \geq 20$$
$$2y_1+2y_2+y_3 \geq 10$$
$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

النموذج الأولي لم يحدد لنا تكلفة الوحدة الواحدة من الطاولات والمكاتب والكراسي، وكذلك التكلفة الكلية للإنتاج، لهذا رأينا فائدة النموذج المقابل في تحديد ذلك ، تمثل دالة الهدف (Min) التكلفة الكلية للمنتجات الثلاثة ، أما تفسير القيود: مثلا القيد الأول على التاجر دفع على الأقل 15 و.ن للطاولة الواحدة وهكذا مع بقية القيود.

3-2- تحليل الحساسية Sensitivity analysis:

الهدف من دراسة تحليل الحساسية هو معرفة أثر التغيرات في بعض عناصر البرنامج الخطي على الحل الأمثل، بمعنى أخر إذا طرأ تغير جديد في البيانات هل سيؤدي إلى تغير الحل الأمثل ؟ ويعرف هذا التحليل باسم أخر وهو التحليل اللاحق الأمثل.

قبل الولوج في حيثيات هذا التحليل وجب التذكير بعنصر مهم وهو طريقة السمبلكس المعدلة التي تطرقنا إليها في الفصل (2).

3-2-1- طريقة السمبلكس المعدلة The Revised Simplex Method :

لإجراء تحليل الحساسية من الضروري تقدير حل السمبلكس بالنسبة للبيانات الاولية للمسألة المعطاة، وهذا هو هدف طريقة السمبلكس المعدلة وهي مكافئة لطريقة السمبلكس العادية، ولكن تختلف في التنفيذ مقارنة بالعادية، فبدلا من الحفاظ على جدول يمثل القيود المعدلة لمجموعة من المتغيرات الأساسية، فأن طريقة السمبلكس المعدلة تحافظ على تمثيل أساس المصفوفة التي تمثل القيود، حيث تتيح هذه الطريقة الموجهة نحو المصفوفة زيادة الكفاءة الحسابية من خلال الحساب المصفوفي، وقد تطرقنا إليها في الفصل (2).

مثال5:

اليك البرنامج الخطي التالي:

$$\begin{aligned}
&Max\ f = 6x+3y+3z \\
&9x+3y+3z \le 180 \\
&3x-3y+6z \le 30 \\
&3x+3y-3z \le 60 \\
&x, y, z \ge 0
\end{aligned}$$

الشكل المعياري:

$$\begin{aligned}
&Max\ f = 6x+3y+3z \\
&9x+3y+3z+S_1 = 180 \\
&3x-3y+6z+S_2 = 30 \\
&3x+3y-3z+S_3 = 60 \\
&x, y, z, S_1, S_2, S_3 \ge 0
\end{aligned}$$

الخطوة 0:

$$H=\begin{bmatrix}9&3&3\\3&-3&6\\3&3&-3\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=B^{-1},\ b=\begin{bmatrix}180\\30\\60\end{bmatrix},\ \begin{cases}C_B=[0\ ,0\ ,\ 0]\\C_H=[6\ ,3\ ,\ 3]\end{cases}$$

$$X_B=B^{-1}b=\begin{bmatrix}180\\30\\60\end{bmatrix},\ f_0=C_BB^{-1}b=C_BX_B=0$$

$$C_BB^{-1}H-C_H=[-6\ ,-3\ ,\ -3]..........(1)$$

الشكل المصفوفي $AX=b$ مع متغيرات الفجوة:

$$\begin{bmatrix}9&3&30&1&0&0\\3&-3&6&0&1&0\\3&3&-3&0&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\y\\z\\S_1\\S_2\\S_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}180\\30\\60\end{bmatrix}$$

جدول السمبلكس النهائي يقدم على النحو الاتي:

	Cj	6	3	3	0	0	0	الحل
CB	**BV**	**x**	**y**	**z**	**S1**	**S2**	**S3**	
3	**z**	4/3	0	1	1/9	1/9	0	**70/3**
0	**S3**	2	0	0	-1/3	2/3	1	**20**
3	**y**	5/3	1	0	2/9	-1/9	0	**110/3**
	Zj-Cj	3	0	0	1	0	0	**f = 180**

حيث: $B=\{z,S_3,y\},H=\{x,S_1,S_3\}$

$$H=\begin{bmatrix}9&0&1\\3&0&0\\3&1&0\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}3&0&3\\6&1&-3\\-3&0&3\end{bmatrix}\Rightarrow B^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{6}&0&-\frac{1}{6}\\-\frac{1}{2}&1&\frac{3}{2}\\\frac{1}{6}&0&\frac{1}{6}\end{bmatrix},\ \begin{cases}C_B=[3\ ,\ 0\ ,\ 3]\\C_H=[6\ ,\ 0\ ,0]\end{cases}$$

$$X_B=\begin{bmatrix}z\\S_2\\y\end{bmatrix}=B^{-1}b=\begin{bmatrix}\frac{1}{6}&0&-\frac{1}{6}\\-\frac{1}{2}&1&\frac{3}{2}\\\frac{1}{6}&0&\frac{1}{6}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}180\\30\\60\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}20\\30\\40\end{bmatrix},\ B^{-1}H=\begin{bmatrix}1&-\frac{1}{6}&\frac{1}{6}\\3&\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\\2&\frac{1}{6}&\frac{1}{6}\end{bmatrix}$$

$$f_4=C_BX_B=[3\ ,\ 0\ ,\ 3]\cdot\begin{bmatrix}20\\30\\40\end{bmatrix}=180$$

$$C_BB^{-1}H-C_H=[3\ ,\ 0\ ,\ 3]\cdot\begin{bmatrix}1&-\frac{1}{6}&\frac{1}{6}\\3&\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\\2&\frac{1}{6}&\frac{1}{6}\end{bmatrix}-[6\ ,0\ ,0]=[3\ ,\ 0\ ,1]\ ....(2)$$

المصفوفة B قابلة للقلب لأن B أساس، X_B تعطى بالصيغة التالية:

$X_B=B^{-1}b-B^{-1}HX_H$.

حالة خاصة: الحل الأمثل يعطى بالصيغة التالية: $X_B=B^{-1}b$ ، لأن متغيرات خارج الأساس يجب أن تكون معدومة أي: $X_H=0$.

ملاحظة3: كل ما تم القيام به حتى الأن ينطبق بشكل اختياري للمتغيرات الأساسية B، ليس شرطا أن تكون مثلى.

بالنسبة لـ (2) يعتبر حل أمثل لأن $B^{-1}b\geq 0$ ، و شعاع التكاليف يكون:

($C_BB^{-1}H-C_H\geq 0$ أو $C_H-C_BB^{-1}H\leq 0$ في حالة Max) و ($C_BB^{-1}H-C_H\leq 0$ أو $C_H-C_BB^{-1}H\geq 0$ في حالة Min).

أثر التغير على b:

لنجري تحليل تأثير الشعاع b، بمعنى أخر يتعلق هذا بدراسة سلوك الحل للمسألة المعدلة عندما نغير b بـ $\tilde{b}=b+\Delta b$ ، ليكن البرنامج الخطي التالي (حالة تعظيم):

$$\begin{aligned}&Max\ Z = CX\\&S/c\\&Ax=\tilde{b}\\&x\geq 0\end{aligned}$$

لتكن X_B متغيرات الأساس، لحل المسألة المعطاة يطرح التساؤل التالي: كيف نعرف تحت أي شرط بقاء الأساس B مثالي؟ في الواقع الاجابة عن هذا التساؤل يظهر الشعاع b تحت شرط الأمثلية $\left(B^{-1}b\geq 0\right)$ مع $C_BB^{-1}H-C_H\geq 0$ ، لذلك فأن المتغيرات الأساسية X_B ستظل مثالية للمسألة المعدلة إذا كان:

$B^{-1}\tilde{b}\geq 0\Leftrightarrow B^{-1}\Delta b\geq -B^{-1}b$.

مثال6:

$$\begin{aligned}&Max\ Z\ =\ 9x_1+7x_2\\&x_1+x_2\leq 5\\&3x_1+2x_2\leq 12\\&x_1,x_2\geq 0\end{aligned}$$

الشكل المعياري:

$$\begin{aligned}&Max\ Z\ =\ 9x_1+7x_2\\&x_1+x_2+S_1=5\\&3x_1+2x_2+S_2=12\\&x_1,x_2,S_1,S_2\geq 0\end{aligned}$$

نفرض أن الأساس المثالي يعطى كما يلي: $B=\{x_2,x_1\}$ ، باقي الحل يعطى كما يلي:

$$H=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}1&1\\2&3\end{bmatrix}\Rightarrow B^{-1}=\begin{bmatrix}3&-1\\-2&1\end{bmatrix},\ \begin{cases}C_B=[7\ ,\ 9]\\C_H=[0\ ,\ 0]\end{cases}$$

$$X_B=\begin{bmatrix}x_2\\x_1\end{bmatrix}=B^{-1}b=\begin{bmatrix}3&-1\\-2&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}5\\12\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix},\ \ X_H=\begin{bmatrix}S_2\\S_1\end{bmatrix}$$

$$Z=C_BX_B=[7\ ,\ 9]\cdot\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}=39\ ,\ B^{-1}H=\begin{bmatrix}-1&3\\1&-2\end{bmatrix}$$

$$C_BB^{-1}H-C_H=[7\ ,\ 9]\cdot\begin{bmatrix}-1&3\\1&-2\end{bmatrix}-[0\ ,\ 0]=[2\ ,\ 3]\geq 0$$

X_B حل أمثل.

نفرض أن معاملات b قد تغيرت، ما هو الحد المسموح به في التغيير في ثوابت القيود (المصادر) بحيث يبقى الحل أمثليا.

نبدأ بقيد المتغير الأول (نفرض أنه تغير) :

$$B^{-1}\tilde{b}=\begin{bmatrix}3&-1\\-2&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}5+\Delta\\12\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3+3\Delta\\2-2\Delta\end{bmatrix}$$

للتذكير شرط الأمثلية $(B^{-1}b\geq 0)$ مع $C_BB^{-1}H-C_H\geq 0$ ، أي أن:

$$\begin{cases}3+3\Delta\geq 0\\2-2\Delta\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta\geq -1\\\Delta\leq 1\end{cases}$$

لذا فالمدى المسموح به هو: $4\leq b_1\leq 6 \Leftarrow -1\leq\Delta\leq 1$ ، لكي يبقى الحل أمثليا وجب أن يكون ثابت القيد الأول محصور ما بين 4 و 6، وأي قيمة خارج هذا المجال سيختل الحل.

مثلا لو كان $b_1=5.5$ فأن: $Z=C_BX_B=C_BB^{-1}\tilde{b}=[7\ ,\ 9]\cdot\begin{bmatrix}4.5\\1\end{bmatrix}=40.5$.

بالنسبة لقيد المتغير الثاني (نفرض أنه تغير) :

$$B^{-1}\tilde{b}=\begin{bmatrix}3&-1\\-2&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}5\\12+\Delta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3-\Delta\\2+\Delta\end{bmatrix}$$

للتذكير شرط الأمثلية ($B^{-1}b \geq 0$) مع $C_B B^{-1} H - C_H \geq 0$، أي أن:

$$\begin{cases} 3-\Delta \geq 0 \\ 2+\Delta \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq -2 \\ \Delta \leq 3 \end{cases}$$

لذا فالمدى المسموح به هو: $-2 \leq \Delta \leq 3 \Leftarrow 10 \leq b_2 \leq 15$ ، لكي يبقى الحل أمثليا وجب أن يكون ثابت القيد الثاني محصور ما بين 10 و 15، وأي قيمة خارج هذا المجال سيختل الحل.

مثلا لو كان $b_2 = 14$ فأن: $Z = C_B X_B = C_B B^{-1} \tilde{b} = [7 \ , \ 9] \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = 39$.

3-2-2- سعر الظل The shadow price:

مصطلح مهم في النموذج الأولي و كذلك في النموذج الثنائي (المقابل) ، ويمكن تفسيره على أنه معدل التحسن في قيمة دالة الهدف المثلى، تعتبر أسعار الظل مقياسا لحساسية البرنامج فيما يتعلق بالقيود، هذه الحساسية هي التغيير النسبي في دالة الهدف عندما يتم تغيير قيمة الطرف الأيمن للقيد بوحدة واحدة.

ملاحظة4:

عندما تكون أسعار الظل موجبة فأن دالة الهدف تتحسن إذا زادت قيمة الطرف الأيمن للقيد (RHS) (نقصد القيد النشط) بوحدة واحدة بشرط أن التغير في الطرف الأيمن لا يغير الحل الأمثل (يكون في الحدود المسموح بها)، والعكس في حالة سعر الظل بالسالب.

ملاحظة5:

القيد النشط (Scarce) هو أن تكون متغيرات القرار موجودة في أساس الحل النهائي، عكس ذلك القيد غير النشط أو الفائض (Abundant) حيث تكون متغيرات القرار غير موجودة في أساس الحل النهائي.

ملاحظة6:

إذا كان القيد نشطا فأن سعر الظل يكون إما:

- موجبا في حالة كون القيد أقل أو يساوي $\leq$.

- سالبا في حالة كون القيد أكبر أو يساوي ≥.
- موجبا ، سالبا ، صفرا في حالة كون القيد عبارة عن مساواة =.

مثال7:

بالرجوع إلى بيانات المثال السابق، حدد أسعار الظل؟

حل المثال:

الشكل المعياري للبرنامج الأولي:

$$Max\ Z = 9x_1 + 7x_2$$
$$x_1 + x_2 + S_1 = 5$$
$$3x_1 + 2x_2 + S_2 = 12$$
$$x_1, x_2, S_1, S_2 \geq 0$$

الجدول النهائي يعطى عل الاتي:

	Cj	9	7	0	0	الحل
CB	BV	X1	X2	S1	S2	
7	X2	0	1	3	-1	3
9	X1	1	0	-2	1	2
	Zj-Cj	0	0	3	2	Z* = 39

نسمي قيم S1، S2 في Z في جدول الحل النهائي بأسعار الظل وهي:

$S_2 = 2\ ,\ S_1 = 3$.

الشكل المعياري للبرنامج الثنائي:

$$Min\ W = 5y_1 + 12y_2$$
$$y_1 + 3y_2 - e_1 + A_1 = 9$$
$$y_1 + 2y_2 - e_2 + A_2 = 12$$
$$y_1, y_2, e_1, e_2, A_1, A_2 \geq 0$$

الجدول النهائي يعطى عل الاتي:

	Cj	5	12	0	0	الحل
CB	BV	y1	y2	e1	e2	

12	**y2**	0	1	-1	1	**2**
5	**y1**	1	0	2	-3	**3**
	Zj-Cj	**0**	**0**	**2**	**3**	**W* = 39**

أسعار الظل في البرنامج الأولي $S_1 = 3$, $S_2 = 2$ هي الحلول المثلى للبرنامج الثنائي: $y_1 = 3$, $y_2 = 2$.

نلخص تغيرات الطرف الأيمن في الجدول التالي:

النقصان المسموح به Allowable Decrease	الزيادة المسموح بها Allowable increase	سعر الظل	قيمة الطرف الأيمن	المتغير
1	1	3	5	X1
2	3	2	12	X2

إذا زاد الطرف الأيمن بوحدة واحدة فإن دالة الهدف تزيد بمقدار ثلاثة وحدو (شرط الحدود المسموح بها)

مثلا لو زاد الطرف الأيمن بوحدة واحدة أي تصبح قيمته 6 بدل من 5 فدالة الهدف تصبح قيمتها 42 بدل 39.

$$B^{-1}\tilde{b} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Z = C_B X_B = C_B B^{-1}\tilde{b} = [7 \ , \ 9] \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix} = 42$$

3-2-3- أثر التغير في معاملات دالة الهدف:

أي دراسة أثر التغير في مكونات شعاع التكلفة على الحل الأمثل في الأساس B ، يعني أن C تصبح كما يلي: $\tilde{C} = C + \Delta C$ ، شعاع التكلفة النسبية في الأساس الأمثل B يعطي كما يلي:

$C_H - C_B B^{-1} H \leq 0$ ، من جهة أخرى الحل الأمثل هو: $X_B = B^{-1}b$ ، $X_H = 0$ ،
X_B : لا يتبع شعاع التكلفة ، يمكن أن يؤثر اختلاف شعاع التكلفة فقط على الحل الأمثل.

إن شرط الاستقرارية (حالة تعظيم مثلا) الذي يضمن بقاء الأساس B مثالي هو كالتالي:

$$\begin{cases} C_H - C_B B^{-1} H \leq 0 \\ \therefore (c+\Delta c)_H - (c+\Delta c)_B B^{-1} H \leq 0 \end{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

على العموم نريد معرفة أثر التغير بالنسبة لمتغير واحد x_i ، $c_i \rightarrow \tilde{c}_i = c_i + \Delta c$.

للتوضيح أكثر نتناول هذا المثال التالي:

مثال8:

إليك البرنامج التالي:

$$\begin{aligned} &Max\ Z = 15x_1 + 10x_2 + 7x_3 \\ &S/c \\ &4x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 200 \\ &5x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 150 \\ &x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 180 \\ &x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

المطلوب: أوجد مدى (مجال) تغير معاملات دالة الهدف؟

حل المثال8:

الشكل المعياري للبرنامج الخطي:

$$\begin{aligned} &Max\ Z = 15x_1 + 10x_2 + 7x_3 \\ &S/c \\ &4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + S_1 = 200 \\ &5x_1 + 2x_2 + x_3 + S_2 = 150 \\ &x_1 + 2x_2 + x_3 + S_3 = 180 \\ &x_1, x_2, x_3, S_1, S_2, S_3 \geq 0 \end{aligned}$$

الجدول النهائي يعطى كالاتي:

CB	Cj	15	10	7	0	0	0	الحل
	BV	X1	X2	X3	S1	S2	S3	$b = x_B$
7	X3	0	7/6	1	5/6	-2/3	0	200/3
15	X1	1	1/6	0	-1/6	1/3	0	50/3
0	S3	0	2/3	0	-2/3	1/3	1	290/3
	$Z_j = \sum CB_i a_{ij}$	15	64/6	7	10/3	1/3	0	Z=2150/3
	Zj-Cj	0	2/3	0	10/3	1/3	0	

متغيرات الأساس: $B = \{x_3, x_1, S_3\}$ ، ومتغيرات خارج الأساس: $H = \{x_2, S_1, S_2\}$ ،

نفرض أننا قمنا بتغيير واحد (أو أكثر) من معاملات C_j شعاع دالة الهدف ، القيمة الجديدة لدالة الهدف تحت أي تغير من معاملاتها تصبح كما يلي:

$$Z = C_B X_B = C_B B^{-1} b$$

$$\therefore (C_B + \Delta C_B) \cdot B^{-1} b \text{............}(2)$$

لا تزال القيمة الجديدة لدالة الهدف مثلى طالما تحقق الشرط (1)، وجب تحديد مصفوفة الأساس الجديدة التي تتضمن المتغيرات الأساسية مع حساب مقلوبها (نجده في جدول السمبلكس الأخير)، الحساب يكون على النحو الاتي:

$$H = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{7}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \; \begin{cases} C_B = [7 \;,\; 15 \;,\; 0] \\ C_H = [10 \;,\; 0 \;,\; 0] \end{cases}$$

علينا كذلك حساب المقادير التالية:

$$(C_H + \Delta C_H) = (10 + \Delta_2 \quad 0 \quad 0)$$

$$(C_B + \Delta C_B) = (7 + \Delta_3 \quad 15 + \Delta_1 \quad 0)$$

$$(C_B + \Delta C_B) \cdot B^{-1}H = \left[\frac{32}{3} + \frac{7\Delta_3}{6} + \frac{\Delta_1}{6}, \frac{10}{3} + \frac{5\Delta_3}{6} - \frac{\Delta_1}{6}, \frac{1}{3} - \frac{2\Delta_3}{3} + \frac{\Delta_1}{3} \right]$$

$$(C_H + \Delta C_H) - (C_B + \Delta C_B) \cdot B^{-1}H$$

$$= \left[-\frac{2}{3} + \Delta_2 - \frac{7}{6}\Delta_3 - \frac{1}{6}\Delta_1, -\frac{10}{3} - \frac{5}{6}\Delta_3 + \frac{1}{6}\Delta_1, -\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\Delta_3 - \frac{1}{3}\Delta_1 \right] \leq 0 \quad \text{.........(3)}$$

نفرض أن معامل x_2 قد تغير، وهو أحد المتغيرات غير الرئيسية، من الصيغة (3) نستنتج أن:

$$-\frac{2}{3} + \Delta_2 \leq 0 \Rightarrow \Delta_2 \leq \frac{2}{3}$$

$$\therefore C_2 + \Delta_2 \leq \frac{2}{3} + C_2$$

$$\therefore \tilde{C}_2 \leq \frac{2}{3} + 10 = \frac{32}{3}$$

$$\therefore \tilde{C}_2 \leq \frac{32}{3}$$

إذا أردنا أن نحافظ على إستقرارية الأساس الأمثل وجب أن لا يتعدى معامل المتغير الثاني ($\frac{32}{3}$).

مثال9:

$$\tilde{C}_2 = 11 > \frac{32}{3} \Rightarrow \left\{ x_1 = \frac{50}{7} \ , \ x_2 = \frac{400}{7} \ , \ x_3 = 0 \right\}$$

$$\tilde{C}_2 = 8 < \frac{32}{3} \Rightarrow \left\{ x_1 = \frac{50}{3} \ , \ x_2 = 0 \ , \ x_3 = \frac{200}{3} \right\}$$

نفرض أن معامل x_1 قد تغير، وهو أحد المتغيرات الرئيسية ، من الصيغة (3) نستنتج أن:

$$\begin{cases} -\frac{2}{3}-\frac{1}{6}\Delta_1 \le 0 \Rightarrow \Delta_1 \ge -4 \\ -\frac{10}{3}+\frac{1}{6}\Delta_1 \le 0 \Rightarrow \Delta_1 \le 20 \\ -\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\Delta_1 \le 0 \Rightarrow \Delta_1 \ge -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le \Delta_1 \le 20 \\ C_1-1 \le C_1+\Delta_1 \le C_1+20 \\ 15-1 \le C_1+\Delta_1 \le 15+20 \\ 14 \le \tilde{C}_1 \le 35 \end{cases}$$

إذا أردنا أن نحافظ على إستقرارية الأساس الأمثل وجب أن يكون مدى معامل المتغير الأول ما بين: $(14 \le \tilde{C}_1 \le 35)$.

مثال10:

$$\tilde{C}_1 = 36 > 35 \Rightarrow \{x_1 = 30 \ , \ x_2 = 0 \ , \ x_3 = 0\}$$
$$\tilde{C}_1 = 16 > 14 \Rightarrow \left\{x_1 = \frac{50}{3} \ , \ x_2 = 0 \ , \ x_3 = \frac{200}{3}\right\}$$

نفرض أن معامل x_3 قد تغير، وهو أحد المتغيرات الرئيسية، من الصيغة (3) نستنتج أن:

$$\begin{cases} -\frac{2}{3}-\frac{7}{6}\Delta_3 \le 0 \Rightarrow \Delta_3 \ge -\frac{4}{7} \\ -\frac{10}{3}-\frac{5}{6}\Delta_3 \le 0 \Rightarrow \Delta_3 \ge -4 \\ -\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\Delta_3 \le 0 \Rightarrow \Delta_3 \le \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{4}{7} \le \Delta_3 \le \frac{1}{2} \\ C_3-\frac{4}{7} \le C_3+\Delta_3 \le C_3+\frac{1}{2} \\ 7-\frac{4}{7} \le C_3+\Delta_3 \le 7+\frac{1}{2} \\ \frac{45}{7} \le \tilde{C}_3 \le \frac{15}{2} \end{cases}$$

إذا أردنا أن نحافظ على إستقرارية الأساس الأمثل وجب أن يكون مدى معامل المتغير الثالث ما بين: $(\frac{45}{7} \le \tilde{C}_3 \le \frac{15}{2})$.

مثال11:

$$\tilde{C}_3 = \frac{15}{2} \Rightarrow \left\{ x_1 = \frac{50}{3} \;,\; x_2 = 0 \;,\; x_3 = \frac{200}{3} \right\}$$

$$\tilde{C}_3 = \frac{13}{2} < \frac{15}{2} \Rightarrow \left\{ x_1 = \frac{50}{3} \;,\; x_2 = 0 \;,\; x_3 = \frac{200}{3} \right\}$$

$$\tilde{C}_3 = 6 < \frac{45}{7} \Rightarrow \left\{ x_1 = \frac{50}{7} \;,\; x_2 = \frac{400}{7} \;,\; x_3 = 0 \right\}$$

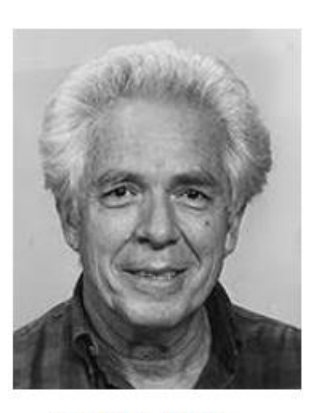
الأعلام المذكورة في الفصل الثالث:



جون فون نيومان
John von Neumann
(1957 – 1903)



جورج برنارد دانتزيغ
George Bernard Dantzig
1914 - 2005



هارولد ويليام كون
Harold William Kuhn
1925 – 2014



ديفيد جيل
David Gale
2008 – 1921



ألبرت ويليام تاكر
Albert William Tucker
1905 - 1995

الفصل الرابع : مسائل النقل والتخصيص

transportation problem and assignment :problem

4-1- مسائل النقل transportation problem :

في سنة 1941 عرض فرانك هيتشكوك Frank Hitchcock[1] لأول مرة فكرة مسألة النقل والتي تتكون من تقليل تكلفة النقل الإجمالية لخطة شحن معينة، إذ يعد تقليل كل من المسافة الإجمالية وتكلفة النقل جزءا من نظرية تدفق الشبكة، نجد كذلك مساهمة ليونيد فيتايفيتش كانتوروفيتش Leonid Vitaliyevich Kantorovich في هذا المجال[2] ، يتضمن هيكل مسألة النقل عددا كبيرا من طرق الشحن من عدة إمدادات إلى عدد من مراكز الطلب، الهدف هو تحديد عدد وحدات العنصر (السلعة أو المنتج) والتي يجب شحنها من الأصل إلى وجهة معينة من أجل تلبية الكمية المطلوبة.

تكمن فلسفة مسألة النقل على فكرة توريد أي منتج من m أصل (مصدر) $(O_1,O_2,....,O_m)$ نحو مركز n $(D_1,D_2,....,D_n)$ بهدف تقليل تكلفة التوزيع الاجمالية، حيث:

المصدر O_i له عرض لـ a_i وحدة $(i=1,...,m)$.

[1] - **فرانك لورين هيتشكوك Frank Lauren Hitchcock 1875 - 1957** رياضياتي أمريكي معروف بصياغته لمسألة النقل في سنة 1941.

[2] - **ليونيد فيتايفيتش كانتوروفيتش Leonid Vitaliyevich Kantorovich 1912- 1986** رياضياتي واقتصادي سوفياتي والمعروف عن نظريته وتطوير لتقنيات تخصيص الموارد المثلى، يعتبر من المؤسسين للبرمجة الخطية، حاز على جائزة ستالين في سنة 1949 وجائزة نوبل في الاقتصاد سنة 1975.

المركز D_j له طلب لـ b_j وحدة $(j=1,..,n)$.

c_{ij}: تكلفة الوحدة الموزعة من المصدر O_i نحو الوجهة D_j $(i=1,...,m$ ، $j=1,..,n)$.

رياضيا يمكن التعبير عن المسألة أعلاه بإيجاد مجموعة من x_{ij} $(i=1,...,m$ ، $j=1,..,n)$،

لتلبية متطلبات العرض والطلب بأقل تكلفة توزيع، نستخدم النموذج الخطي التالي:

$$Min\ Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$S/C \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i \ , \ i=1,...,m \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \ge b_j \ , \ j=1,...,n \\ x_{ij} \ge 0 \ , \ i=1,...,m \ , \ j=1,...,n \end{cases}$$

وبالتالي، فإن المسألة تكمن في تحديد x_{ij} ، وهو عدد الوحدات التي سيتم نقلها من O_i نحو D_j ، بحيث يتم استهلاك الإمدادات وتلبية الطلبات عند أقل تكلفة اجمالية.

تتوافق قيود m الأولى مع حدود العرض، وهي تعبر بوجوب عدم تجاوز المعروض من وحدات السلع المتاحة في كل مصدر، وتضمن n قيود تلبية متطلبات وحدات السلع نحو الوجهات، وكذلك لا ننسى تحديد إيجابية متغيرات القرار لأنها تمثل عدد وحدات السلع المشحونة.

تظهر مسألة النقل في النموذج المعياري التالي:

$$Min\ Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$S/C\begin{cases}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i\ ,\ i=1,...,m \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j\ ,\ j=1,...,n \\ x_{ij} \geq 0\ ,\ i=1,...,m\ ,\ j=1,...,n\end{cases}$$

وجود الحل الممكن (المسموح به): إن الشرط الضروري والكافي لإيجاد حل ممكن لمسائل النقل هو: إجمالي العرض = إجمالي الطلب ($\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$ ....(1)).

الجدول التالي يوضح مسألة النقل:

	D_1	D_2	....	D_n	العرض a_i
O_1	c_{11}	c_{12}	....	c_{1n}	a_1
O_2	c_{21}	c_{22}	....	c_{2n}	a_2
. .	. .	. .	. .	. .	. .
O_m	c_{m1}	c_{m2}	....	c_{mn}	a_m
الطلب b_j	b_1	b_2	....	b_n	$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$

4-1-1- توازن مسألة النقل:

تنص الصيغة (1) أعلاه على أنه في ظل افتراض أن إجمالي العرض يساوي إجمالي الطلب دائما ما يكون لمسألة النقل حل ممكن، ومع ذلك لا يتم الاحتفاظ بهذا الافتراض

في بعض الحالات عندما يكون إجمالي العرض لا يساوي إجمالي الطلب ، في هذه الحالة يجب تكييف المسألة قبل حلها، وسيتم تفسير الحل في الفقرة التالية:

الحالة الأولى: عندما يتجاوز الطلب العرض: $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$.

لا يمكن تلبية إجمالي الطلب بالعرض الحالي، في هذه الحالة يضاف المصدر الوهمي O_{m+1} لموازنة النموذج، تكلفة التوريد ونقل الوحدة المقابلة لها تكون كما يلي:

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$$
$$c_{m+1,j} = 0 \ , \ j = 1,\ldots,n$$

مثال1:

نعتبر مسألة النقل التالية:

	D_1	D_2	D_3	**العرض** a_i
O_1	6	12	9	30
O_2	18	4	12	60
الطلب b_j	30	40	50	

إجمالي العرض: $a_1 + a_2 = 30 + 60 = 90$

إجمالي الطلب: $b_1 + b_2 + b_3 = 30 + 40 + 50 = 120$

سنضيف مصدر وهمي : $a_3 = 120 - 90 = 30$ ، نعتبر أن تكاليف نقل الوحدات $c_{31} = c_{32} = c_{33} = 0$ وهذا يؤدي إلى التوازن التالي:

	D_1	D_2	D_3	العرض a_i
O_1	6	12	9	30
O_2	18	4	12	60
O_3	0	0	0	30
الطلب b_j	30	40	50	120

الحالة الثانية: عندما يتجاوز العرض الطلب: $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$.

نظرًا لأن إجمالي العرض أعلى من إجمالي الطلب، فإننا نضيف مركز وهمي D_{n+1} إلى المسألة، بحيث تكون تكاليف الطلب ونقل الوحدة المقابلة كما يلي:

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$$
$$c_{i,n+1} = 0 \;\; , \;\; i = 1,\dots,m$$

مثال2:

نعتبر مسألة النقل التالية:

	D_1	D_2	العرض a_i
O_1	6	12	30
O_2	18	4	60
O_3	5	5	30
الطلب b_j	30	40	

إجمالي العرض: $a_1 + a_2 + a_3 = 30 + 60 + 30 = 120$

إجمالي الطلب: $b_1 + b_2 = 30 + 40 = 70$

سنضيف مركز وهمي : $b_3 = 120 - 70 = 50$ ، نعتبر أن تكاليف نقل الوحدات $c_{13} = c_{23} = c_{33} = 0$ وهذا يؤدي إلى التوازن التالي:

	D_1	D_2	D_3	**العرض** a_i
O_1	6	12	0	30
O_2	18	4	0	60
O_3	5	5	0	30
الطلب b_j	30	40	50	120

4-1-2- خوارزمية مسألة النقل:

يمكن تلخيصها في الخطوات التالية:

الخطوة الأولى: صياغة المسألة ووضع البيانات في المصفوفة.

الخطوة الثانية: الحصول على حل ممكن أساسي أولي، سنتطرق إلى ثلاث طرق مختلفة وهي:

1- طريقة الزاوية الشمالية الغربية North-West Corner Method.
2- طريقة أقل تكلفة Least Cost Method.
3- طريقة فوجل التقريبية Vogel's Approximation.

يجب أن يستوفي الحل الأولي الذي تم الحصول عليه من الطرق الثلاث الشروط التالية:

أ- يجب أن يكون الحل ممكنا، أي يجب أن يلبي جميع قيود العرض والطلب (شرط الصيغة 1).

ب- يجب أن يكون عدد التخصيصات مساويا لـ $m+n-1$ ، حيث m هو عدد الصفوف و n هو عدد الأعمدة.

يطلق على أي حل يفي بالشروط المذكورة أعلاه اسم حل أساسي نظامي، وإلا فإنه حل غير نظامي degenerate solution.

الخطوة الثالثة: الوصول للحل الأمثل: حيث تتم مناقشة طريقتي التوزيع المعدل (MODI) والمسار المتعرج لاختبار أمثلية الحل الذي تم الحصول عليه في الخطوة 2، أي إذا كان الحل الحالي هو الأمثل (الحل الوحيد الذي لا يمكن إيجاد حل أفضل منه) أم لا (وجود حلول أخرى مثلى).

الخطوة الرابعة: تحديث الحل نكرر الخطوة 3 حتى يتم الوصول إلى الحل الأمثل.

أ- **طرق إيجاد الحلول الأولية:** كما ذكرنا في الخطوة الثانية، حيث سنتطرق إلى ثلاثة طرق، وقبل عرض الطرق نتناول مثالا عاما ونطبق عليه الطرق الثلاثة.

مثال3:

ترغب شركة بتقليل تكلفة شحن بضاعتها من المصنع نحو مستودعاتها، نفرض أن هناك ثلاثة مصانع تملكها هذه الشركة (1، 2، 3) بطاقة قصوى كما يلي:

المصنع الأول: 60000 وحدة منتجة، المصنع الثاني: 70000 وحدة منتجة، المصنع الثالث: 30000 وحدة منتجة.

ويتم توزيع هذه المنتج على ثلاثة مستودعات، وحسب الطلب الأقصى لكل مركز، حيث كانت كما يلي:

المستودع A: 40000 وحدة، المستودع B: 50000 وحدة، المستودع C: 70000 وحدة.

وبعد الدراسة التحليلية للتكاليف تبين أن تكلفة نقل الوحدة من المصنع نحو المستودع (بـ : دج) كانت كما يلي:

	المستودع 1 D_1	المستودع 2 D_2	المستودع 3 D_3	العرض a_i
المصنع 1 O_1	50	42	30	60000
المصنع 2 O_2	45	30	20	70000
المصنع 3 O_3	55	38	35	30000
الطلب b_j	40000	50000	70000	

تبحث هذه الشركة على طريقة تزود بها المستودعات الثلاثة عبر هذه المصانع الثلاثة بأقل التكاليف، و**المطلوب:**

- هل المسألة تشكل مسألة نقل ؟

حل المثال3:

$$Min\ Z = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} c_{ij}x_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^{3} b_j = 40000 + 50000 + 70000 = 160000$$

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = 60000 + 70000 + 30000 = 160000$$

نلاحظ أن العرض مساو للطلب، كما أن كميات العرض والطلب موجبة فهي مسألة نقل.

1- طريقة الزاوية الشمالية الغربية North-West Corner Method :

تعتبر من أبسط الطرق، حيث نوضحها بحل المثال السابق:

الخطوة الأولى: نتفحص شرط التوازن(شرط الصيغة 1) ، والخطوات التالية تؤدي إلى حل أولي ممكن:

الخطوة الثانية: في الزاوية العلوية اليسرى (الزاوية الشمالية الغربية) من الجدول نحدد الخلية الأولى وهي الخلية (O_1, D_1) ثم نقارن الكمية المطلوبة من قبل مركز الطلب D_1 بالكمية المتوفرة لدى المصدر O_1 ، ونخصص أقل الكمية (O_1, D_1) للخلية أي: $Min(60000, 40000) = 40000$ ، يعني تخصيص 40000 وحدة للخلية (O_1, D_1) سيسد احتياجات المركز D_1 بالكامل، باقي التخصيصات للخلايا الأخرى في العمود ذاته تساوي 0.

الخطوة الثالثة: نأخذ الخلية الثانية (O_1, D_2) ونقارن الكمية المتاحة للمصدر O_1 بالكمية المطلوبة من قبل مركز الطلب D_2، ونختار الأقل ونخصصها للخلية (O_1, D_2)، $Min(20000, 50000) = 20000$ ، أي يعني تخصيص 20000 وحدة للخلية (O_1, D_2)، بنفس الكيفية مع الخلية (O_2, D_2) حيث نخصص لها 30000

وحدة، و (O_2, D_3) نخصص لها 40000 وحدة، و (O_3, D_3) نخصص لها 30000 وحدة، نوضح هذا في الجدول التالي:

	المستودع 1 D_1	المستودع 2 D_2	المستودع 3 D_3	العرض a_i
المصنع 1 O_1	40000 50	20000 42	30	~~60000~~ ~~20000~~
المصنع 2 O_2	45	30000 30	40000 20	~~70000~~ ~~40000~~
المصنع 3 O_3	55	38	30000 35	~~30000~~
الطلب b_j	~~40000~~	~~50000~~ ~~30000~~	~~70000~~ ~~30000~~	

نلاحظ أن $n+m-1=3+3-1=5$ لذا فأن هذا الحل هو حل نظامي، والحلول هي كما يلي:

$$x_{11}=40000\ ,\ x_{12}=20000\ ,\ x_{22}=30000$$
$$x_{23}=40000\ ,\ x_{33}=30000$$

نحسب إجمالي تكاليف النقل طبقا للجدول السابق:

$$T=40000\times 50+20000\times 42+30000\times 30$$
$$+40000\times 20+30000\times 35=5590000\ DA$$

2- طريقة أقل تكلفة Least Cost Method.

هي طريقة أخرى تستخدم للحصول على الحل الأولي الممكن(المسموح به) لمسألة النقل، هنا يبدأ التخصيص بالخلية ذات التكلفة الدنيا، بحيث يتم اختيار الخلايا الأقل

تكلفة على الخلية الأعلى تكلفة بهدف تدنية تكلفة النقل، هذه الطريقة تعطي نتائج أفضل من الطريقة السابقة لأنها تأخذ في الاعتبار تكلفة الشحن أثناء إجراء التخصيص ، في حين أن طريقة الزاوية الشمالية الغربية تراعي فقط متطلبات توافر العرض والتخصيص يبدأ من الزاوية اليسرى القصوى بغض النظر عن تكلفة الشحن ، ويمكن تلخيصها عبر حل المثال السابق:

نلاحظ أن أقل تكلفة في الجدول هي 20 دج وهي تقابل المصدر O_2 و المركز D_3 لذا نقارن ما هو متوفر لدى المصدر O_2 مع ما يحتاجه مركز الطلب D_3 ثم نختار أقل الكميتين ونخصصها للخلية (O_2, D_3) أي $Min(70000, 70000) = 70000$ ، في هذه الحالة احتياجات المركز D_3 سدت بالكامل ، كما أن كميات المصدر O_2 هي الأخرى نفدت بالكامل.

بنفس الكيفية نلاحظ أن أقل تكلفة هي 30 دج الموجودة في الخليتين (O_1, D_3) و (O_2, D_2)لكن لا نستطيع التخصيص في هاتين الخليتين بسبب سد احتياجات المركز D_3 الخلية (O_1, D_3) و نفاد كميات المصدر O_2 الخلية (O_2, D_2) لذا سيتم اختيار تكلفة 38 دج التي تقع في الخلية (O_3, D_2) والمرشحة لتخصيص كمية 30000 وحدة ($Min(30000, 50000) = 30000$) ، لقد تم نفاد كميات المصدر O_3 ، باقي التخصيصات تتم بنفس الكيفية، الخلية (O_1, D_2) نخصص لها 20000 وحدة ($Min(60000, 20000) = 20000$) ، وأخيرا الخلية (O_1, D_1)نخصص لها 40000 وحدة.

نوضح كل ما سبق في الجدول التالي:

	المستودع 1 D_1	المستودع 2 D_2	المستودع 3 D_3	العرض a_i
المصنع 1 O_1	40000 50	20000 42	30	60000
المصنع 2 O_2	45	30	70000 20	70000
المصنع 3 O_3	55	30000 38	35	30000
الطلب b_j	40000	50000 30000	70000	

نلاحظ أن عدد الحلول 4 أقل من $n+m-1=3+3-1=5$ لذا فأن هذا الحل هو حل غير نظامي solution is degenerate .

والحلول هي كما يلي:

$$x_{11}=40000\ ,\ x_{12}=20000$$
$$x_{23}=70000\ ,\ x_{32}=30000$$

نحسب إجمالي تكاليف النقل طبقا للجدول السابق:

$$T=40000\times 50+20000\times 42+70000\times 20$$
$$+30000\times 38=5380000\ DA$$

نلاحظ أن تكلفة النقل قد انخفضت في هذه الطريقة مقارنة بطريقة الزاوية الشمالية الغربية $(5380000<5590000)$.

3- طريقة فوجل Vogel's Approximation

طريقة فوجل التقريبية أو VAM هي إجراء تكراري محسوب لاكتشاف الحل الممكن الأولي لمسألة النقل، مثل طريقة أقل تكلفة، يتم هنا أيضا أخذ تكلفة الشحن في الاعتبار، ولكن بمعنى نسبي، فيما يلي مخطط يوضح الخطوات المتبعة في حل مسألة النقل باستخدام هذه الطريقة :



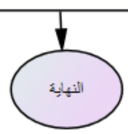
ايجاد فرق بين أقل تكلفتين في كل صف و في كل عمود، حيث يتم تأشير هذه الفرق على جانبي جدول الحل

تحديد الصف أو العمود الذي له أكبر فرق في التكلفة

اختيار الخلية ذات التكلفة الأقل في ذلك العمود

بالنسبة للخلية التي أختيرت في الخطوة السابقة حيث نقارن احتياجات المركز مع ماهو متوفر في المصدر لنأخذ القيمة الأقل

نعيد حساب الفرق مرة أخرى لكل من الأعمدة والصفوف، ونكرر العملية السابقة إلى أن يتم تلبية جميع احتياجات المراكز من المصادر المتاحة



مثال4:

حل المثال السابق بطريقة فوجل.

الخطوة1:

نحدد الفرق في التكلفة (بين أقل تكلفتين) في كل صف وفي كل عمود، نلاحظ أن الصف الأول له أكبر فرق (12)، نبحث عن أقل تكلفة في الصف الأول فنجدها في الخلية (O_1, D_3)، نقارن احتياجات مركز الطلب D_3 مع الكمية المتاحة من المصدر O_1 ثم نختار أقل الكمية أي: $Min(60000, 70000) = 60000$.

الخطوة2:

نقوم بتعديل الفروقات بين الصفوف والأعمدة (للمساعدة فقد تم تلوين الفروق في كل مرحلة قصد تسهيل الفهم) ، نلاحظ أن العمود الثالث له أكبر فرق (15)، نبحث عن أقل تكلفة في العمود الثالث فنجدها في الخلية (O_2, D_3)، نقارن احتياجات مركز الطلب D_3 مع الكمية المتاحة من المصدر O_2 ثم نختار أقل الكمية أي: $Min(10000, 70000) = 10000$.

ثم نقوم بتعديل الفروقات بين الصفوف والأعمدة مرة أخرى ونكرر نفس العملية.

الخطوة3:

أكبر فرق (17) (O_3) أقل تكلفة في الصف الثالث نجدها في الخلية (O_3, D_2) ثم نختار أقل الكمية أي: $Min(30000, 50000) = 30000$.

الخطوة4:

أكبر فرق (45) (D_1) أقل تكلفة في العمود الأول نجدها في الخلية (O_2, D_1) ثم نختار أقل الكمية أي: $Min(60000, 40000) = 40000$.

الخطوة5:

أكبر فرق (30) (D_2) أقل تكلفة في العمود الثاني نجدها في الخلية (O_3, D_2) ثم نختار أقل الكمية أي: $Min(20000, 20000) = 20000$.

نوضح جميع الخطوات السابقة في الجدول التالي:

	D_1 المستودع 1	D_2 المستودع 2	D_3 المستودع 3	العرض	فرق الصفوف
O_1 المصنع 1	50	42	30 60000	60000	12,-,-,-,-
O_2 المصنع 2	45 40000	30 20000	20 10000	70000 60000 20000	10,10,15,15,30
O_3 المصنع 3	55	38 30000	35	30000	3,3,17,-,-
الطلب	40000	50000 20000	70000 10000		
فرق الأعمدة	5	8	10		
	10	8	15		
	10	8	-		
	45	30	-		
	-	30	-		

نلاحظ أن $n+m-1=3+3-1=5$ لذا فأن هذا الحل هو حل نظامي، والحلول هي كما يلي:

$$x_{31} = 60000 \ , \ x_{21} = 40000 \ , \ x_{22} = 20000$$
$$x_{23} = 10000 \ , \ x_{32} = 30000$$

نحسب إجمالي تكاليف النقل طبقا للجدول السابق:

$$T = 60000 \times 30 + 40000 \times 45 + 20000 \times 30$$
$$+10000 \times 20 + 30000 \times 38 = 5540000 \ DA$$

ب – اختبار الأمْثَلَة:

بمجرد الحصول على حل أولي ، فإن الخطوة التالية هي التحقق من أمثلته من حيث جدوى الحل وإجمالي تكلفة النقل الدنيا، يبدأ اختبار الأمثلية بحساب تكلفة الفرصة البديلة المرتبطة بكل خلية شاغرة في جدول النقل، يتم تحديد خلية غير مشغولة بأكبر تكلفة فرصة (نسميها أيضا منفعة التكلفة) وتكون بأكبر إشارة سالبة لتضمينها في المجموعة الجديدة لمسارات النقل (عمليات التخصيص)، هذه القيمة تشير إلى خفض التكلفة لكل وحدة والذي يمكن تحقيقه من خلال إجراء التخصيص المناسب في الخلية غير المشغولة ، سنتطرق إلى طريقتين لتحسين الحل وهم:

طريقة المسار المتعرج.

طريقة التوزيع المعدلة.

أ- طريقة المسار المتعرج (أو طريقة الحجر المتنقل) Stepping Stone Method:

تستخدم هذه الطريقة للتحقق من أمثلية الحل الممكن الأولي الذي تم تحديده بإحدى الطرق المستخدمة سابقا (الزاوية الشمالية الغربية ، أقل التكاليف ، فوجل)، وبالتالي فإن طريقة الحجر المتنقل هي إجراء لإيجاد إمكانات أي متغيرات غير أساسية (خلايا فارغة) من حيث دالة الهدف، ومن خلالها نحدد ما هو الأثر على تكلفة النقل في

حالة تخصيص وحدة واحدة للخلية الفارغة، بمساعدة هذه الطريقة والتي توصلنا إلى معرفة ما إذا كان هذا الحل أمثل أم لا.

أما عن خطوات هذه الطريقة فهي كما يلي:

1- الشرط الأساسي للحل الأمثل هو التأكد من أن عدد الخلايا المشغولة يساوي تماما $m+n-1$، حيث "m" هو عدد الصفوف و "n" يساوي عدد الأعمدة.

2- تحديد الخلية الفارغة بحيث يتم إنشاء المسار المغلق الذي يبدأ من الخلية غير المشغولة ويعود إلى نفس الخلية غير المشغولة والتي تسمى بالحلقة المغلقة Closed Loop.

لإنشاء حلقة مغلقة ، يجب مراعاة الشروط التالية:

- في الحلقة المغلقة يتم تحديد الخلايا في تسلسل بحيث تكون خلية واحدة غير مستخدمة (غير مشغولة)، ويتم استخدام (شغل) جميع الخلايا الأخرى.
- يقع زوج من الخلايا المستخدمة المتتالية إما في نفس الصف أو في نفس العمود.
- تقع الخلايا الأولى والأخيرة في الحلقة المغلقة إما في نفس الصف أو العمود.
- يسمح فقط بالحركة الأفقية والعمودية.

3- بمجرد إنشاء الحلقة، نقوم بتعيين إشارة "+" أو "–" في كل زاوية خلية من الحلقة، ولكن نبدأ بالإشارة "+" للخلية غير المشغولة.

4-نقوم بإضافة تكاليف نقل الوحدة المرتبطة بكل خلية يتم تتبعها في المسار المغلق، و سيعطي هذا صافي التغير من حيث التكلفة.

5- نكرر هذه الخطوات مرة أخرى حتى يتم تقييم جميع الخلايا غير المشغولة.

6- إذا كانت جميع التغيرات المحسوبة موجبة فقد تم الوصول إلى الحل الأمثل.

7- نحدد الخلية غير المشغولة ذات صافي تغير التكلفة الأكبر (بالسالب) ، ونحدد الحد الأقصى لعدد الوحدات التي يمكن تخصيصها لهذه الخلية من خلال أصغر قيمة من الخلايا ذات الاشارة السالبة المقابلة للخلية المرشحة

للتخصيص (من جهة الصف ومن جهة العمود) على المسار المغلق ،
نضيف هذ القيمة إلى الخلية غير المشغولة وإلى جميع الخلايا الأخرى
الموجودة على المسار المميز بإشارة " +" ونطرحها من الخلايا الموجودة على
المسار المغلق المميز بإشارة " – "

مثال5:

باستخدام الحل الأولي بطريقة الزاوية الشمالية الغربية، **المطلوب:** إيجاد الحل الأمثل باستخدام طريقة المسار المتعرج.

حل المثال5:

الحل الأولي بطريقة الزاوية الشمالية الغربية :

	المستودع D_1 1	المستودع D_2 2	المستودع D_3 3	**العرض** a_i
المصنع O_1 1	50 40000	42 20000	30	60000
المصنع O_2 2	45	30 30000	20 40000	70000
المصنع O_3 3	55	38	35 30000	30000
الطلب b_j	40000	50000	70000	

نلاحظ أن $n+m-1=3+3-1=5$ لذا فأن هذا الحل هو حل نظامي، والحلول هي كما يلي:

$$x_{11}=40000\ ,\ x_{12}=20000\ ,\ x_{22}=30000$$
$$x_{23}=40000\ ,\ x_{33}=30000$$

نحسب إجمالي تكاليف النقل طبقا للجدول السابق:

$$T = 40000 \times 50 + 20000 \times 42 + 30000 \times 30$$
$$+40000 \times 20 + 30000 \times 35 = 5590000\ DA$$

1− نقوم بإنشاء حلقة مغلقة للخلايا غير المشغولة (الفارغة):

الخلايا الفارغة	المسار المغلق	صافي تغير التكلفة
O_1D_3	$O_2D_3 \leftarrow O_2D_2 \leftarrow O_1D_2 \leftarrow O_1D_3$	−30+42−30 **2**−=20
O_2D_1	$O_1D_1 \leftarrow O_1D_2 \leftarrow O_2D_2 \leftarrow O_2D_1$	−42+30−45 **7**=50
O_3D_1	$O_1D_1 \leftarrow O_1D_2 \leftarrow O_2D_2 \leftarrow O_2D_3 \leftarrow O_3D_3 \leftarrow O_3D_1$	−20+35−55 **2**=50−42+30
O_3D_2	$O_2D_2 \leftarrow O_2D_3 \leftarrow O_3D_3 \leftarrow O_3D_2$	−20+35−38 **7**−=30

2− نحدد الخلية غير المشغولة التي تحتوي على أعلى صافي تغير للتكلفة بالسالب ($O_3D_2 = -7$) ونرسم مسارا مغلقا، وتخصيص (+/−) لخلايا المسار $O_2D_2 \leftarrow O_2D_3 \leftarrow O_3D_3 \leftarrow O_3D_2$ ، ونوضح ذلك في الجدول التالي:

العرض a_i	المستودع D_3 3	المستودع D_2 2	المستودع D_1 1	
60000	30	42 20000	50 40000	المصنع O_1 1
70000	+ 20 40000	- 30 30000	45	المصنع O_2 2
30000	- 35 30000	38 +	55	المصنع O_3 3
	70000	50000	40000	الطلب b_j

للمحافظة على التوازن نلاحظ أن أقل قيمة بين موضعين سالبين (−) في المسار المغلق $Min(30000, 30000) = 30000$ لذا نقوم بإضافة وطرح قيمة 30000 دج في خلايا المسار تبعا لـ (+/−)، ليصبح شكل الجدول الجديد كالاتي:

	المستودع D_1 1	المستودع D_2 2	المستودع D_3 3	العرض a_i
المصنع O_1 1	50 40000	42 20000	30	60000
المصنع O_2 2	45	30	20 70000	70000
المصنع O_3 3	55	38 30000	35	30000
الطلب b_j	40000	50000	70000	

والحلول هي كما يلي:

$$x_{11} = 40000 \ , \ x_{12} = 20000$$
$$x_{23} = 70000 \ , \ x_{32} = 30000 \ .$$

نحسب إجمالي تكاليف النقل طبقا للجدول السابق:

$$T = 40000 \times 50 + 20000 \times 42 + 70000 \times 20$$
$$+30000 \times 38 = 5380000 \ DA$$

نلاحظ أن عدد الحلول 4 أقل من $n + m - 1 = 3 + 3 - 1 = 5$ لذا فأن هذا الحل هو حل غير نظامي solution is degenerate .

لذا سنخصص قيمة وهمية (d) للخلية التي لها أقل تكلفة، نلاحظ أن الخلية O_1D_3 والخلية O_2D_2 لهما أقل تكلفة بالنسبة لباقي الخلايا الشاغرة، نختار واحدة منهما ولتكن O_1D_3، ليصبح شكل الجدول الجديد كما يلي:

	المستودع D_1 1	المستودع D_2 2	المستودع D_3 3	العرض a_i
المصنع O_1 1	50 40000	42 20000	30 d	60000
المصنع O_2 2	45	30	20 70000	70000
المصنع O_3 3	55	38 30000	35	30000
الطلب b_j	40000	50000	70000	

3- نقوم مرة ثانية بإنشاء حلقة مغلقة للخلايا غير المشغولة (الفارغة):

الخلايا الفارغة	المسار المغلق	صافي تغير التكلفة
O_2D_1	$O_1D_1 \leftarrow O_1D_3 \leftarrow O_2D_3 \leftarrow O_2D_1$	**5**=50−30+20−45
O_2D_2	$O_1D_2 \leftarrow O_1D_3 \leftarrow O_2D_3 \leftarrow O_2D_2$	−=42−30+20−30 **2**
O_3D_1	$O_1D_1 \leftarrow O_1D_2 \leftarrow O_3D_2 \leftarrow O_3D_1$	**9**=50−42+38−55
O_3D_3	$O_1D_3 \leftarrow O_1D_2 \leftarrow O_3D_2 \leftarrow O_3D_3$	**9**=30−42+38−35

4- نحدد الخلية غير المشغولة التي تحتوي على أعلى صافي تغير للتكلفة بالسالب ($O_2D_2 = -2$) ونرسم مسارا مغلقا، وتخصيص (+/−) لخلايا المسار $O_1D_2 \leftarrow O_1D_3 \leftarrow O_2D_3 \leftarrow O_2D_2$ ، ونوضح ذلك في الجدول التالي:

	المستودع D_1 1	المستودع D_2 2	المستودع D_3 3	العرض a_i
المصنع O_1 1	50 40000	- 42 20000	+ 30 d	60000
المصنع O_2 2	45	+ 30	- 20 70000	70000
المصنع O_3 3	55	38 30000	35	30000
الطلب b_j	40000	50000	70000	

للمحافظة على التوازن نلاحظ أن أقل قيمة بين موضعين سالبين $(-)$ في المسار المغلق $Min(20000,70000)=20000$ لذا نقوم بإضافة وطرح قيمة 20000 دج في خلايا المسار تبعا لـ $(+/-)$، ليصبح شكل الجدول الجديد كالاتي:

ليصبح شكل الجدول الجديد كالاتي:

	المستودع D_1 1	المستودع D_2 2	المستودع D_3 3	العرض a_i
المصنع O_1 1	50 40000	42	30 20000	60000
المصنع O_2 2	45	30 20000	20 50000	70000
المصنع O_3 3	55	38 30000	35	30000
الطلب b_j	40000	50000	70000	

نلاحظ أن $n+m-1=3+3-1=5$ لذا فأن هذا الحل هو حل نظامي، والحلول هي كما يلي:

$x_{11} = 40000$, $x_{13} = 20000$, $x_{22} = 20000$
$x_{23} = 50000$, $x_{31} = 30000$

نحسب إجمالي تكاليف النقل طبقا للجدول السابق:

$$T = 40000 \times 50 + 20000 \times 30 + 20000 \times 30$$
$$+50000 \times 20 + 30000 \times 38 = 5340000\ DA$$

5− نقوم مرة أخرى بإنشاء حلقة مغلقة للخلايا غير المشغولة (الفارغة):

الخلايا الفارغة	المسار المغلق	صافي تغير التكلفة
O_1D_2	$O_2D_2 \leftarrow O_2D_3 \leftarrow O_1D_3 \leftarrow O_1D_2$	−20+30−42 **2**=30
O_2D_1	$O_1D_1 \leftarrow O_1D_3 \leftarrow O_2D_3 \leftarrow O_2D_1$	−30+20−45 **5**=50
O_3D_1	$O_1D_1 \leftarrow O_1D_3 \leftarrow O_2D_3 \leftarrow O_2D_2 \leftarrow O_3D_2 \leftarrow O_3D_1$	−30+38−55 **7**=50−30+20
O_3D_3	$O_2D_3 \leftarrow O_2D_2 \leftarrow O_3D_2 \leftarrow O_3D_3$	−30+38−35 **7**=20

وحيث أن صافي تغير التكلفة أكبر من الصفر فنعتبر هذا الحل هو الحل النهائي والأمثل، والحلول تكون كما يلي:

$x_{11} = 40000$, $x_{13} = 20000$, $x_{22} = 20000$
$x_{23} = 50000$, $x_{31} = 30000$

أما إجمالي تكاليف النقل طبقا للجدول السابق:

$$T = 40000 \times 50 + 20000 \times 30 + 20000 \times 30$$
$$+50000 \times 20 + 30000 \times 38 = 5340000\ DA$$

ب- طريقة التوزيع المعدلة(Modified Distribution Method (MODI :

في طريقة التوزيع المعدلة، يتم حساب جميع تقييمات الخلايا غير المشغولة في وقت واحد، وبالتالي يتم تتبع مسار واحد مغلق فقط تبعا لأكبر قيمة بالسالب، لذلك فهي توفر الوقت بشكل كبير مقارنة بطريقة المسار المتعرج.

نلخصها في الخطوات التالية:

1- نحدد حلا أوليا أساسيا مسموح به باستخدام إحدى الطرق الثلاث الواردة السابقة.
2- نحدد قيم المتغيرات الثنائية: u_i و v_j ، باستخدام $u_i + v_j = c_{ij}$.
3- حساب تكلفة الفرصة البديلة باستخدام $\Delta_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$.
4- نتحقق من إشارة كل تكلفة فرصة، بحيث أنه إذا كانت تكاليف الفرصة البديلة لجميع الخلايا غير المشغولة إما موجبة أو صفرية $(\Delta_{ij} \geq 0)$ ، فإن الحل المعطى هو الحل الأمثل، من جهة أخرى إذا كانت خلية واحدة أو أكثر من الخلايا غير المشغولة لديها تكلفة فرصة سالبة، فإن الحل المعطى ليس حلا مثاليا ويمكن تحقيق المزيد من التوفير في تكلفة النقل.
5- نحدد الخلية غير المشغولة بأقل تكلفة فرصة سالبة لتكون الخلية التي سيتم تضمينها في الحل التالي.
6- نرسم مسارا مغلقا أو حلقة للخلية غير المشغولة المحددة في الخطوة السابقة.
7- نقوم بتعيين إشارات (+/-) بديلة في الخلايا غير المشغولة على نقاط الزاوية للمسار المغلق (مع إلزامية إشارة + في الخلية التي تم تقييمها).
8- نحدد الحد الأقصى لعدد الوحدات التي يجب شحنها لهذه الخلية الشاغرة، تشير أصغر قيمة ذات موضع سالب على المسار المغلق إلى عدد الوحدات التي يمكن شحنها إلى الخلية المدخلة، ونضيف هذه الكمية إلى جميع الخلايا الموجودة في نقاط الزاوية للمسار المغلق المميز بعلامات (+) ، ونقوم بطرحها

من تلك الخلايا المميزة بعلامات (−) ، بهذه الطريقة تصبح الخلية غير المشغولة خلية مشغولة.

9- نكرر هذا الإجراء بأكمله حتى يتم الحصول على الحل الأمثل.

مثال6:

باستخدام الحل الأولي بطريقة الزاوية الشمالية الغربية، المطلوب: إيجاد الحل الأمثل باستخدام طريقة التوزيع المعدلة.

حل المثال6:

الجدول النهائي للحل الأولي:

	المستودع D_1 1	المستودع D_2 2	المستودع D_3 3	العرض a_i
المصنع O_1 1	50 40000	42 20000	30	60000
المصنع O_2 2	45	30 30000	20 40000	70000
المصنع O_3 3	55	38	35 30000	30000
الطلب b_j	40000	50000	70000	

نلاحظ أن $n+m-1=3+3-1=5$ لذا فأن هذا الحل هو حل نظامي، والحلول هي كما يلي:

$$x_{11}=40000\ ,\ x_{12}=20000\ ,\ x_{22}=30000$$
$$x_{23}=40000\ ,\ x_{33}=30000$$

نحسب إجمالي تكاليف النقل طبقا للجدول السابق:

$$T = 40000 \times 50 + 20000 \times 42 + 30000 \times 30$$
$$+40000 \times 20 + 30000 \times 35 = 5590000\ DA$$

1- نقوم بحساب كل من u_i و v_j بالنسبة للخلايا المشغولة، حيث: $u_i + v_j = c_{ij}$.

نضع $u_1 = 0$ فأن:

$$c_{11} = u_1 + v_1 = 50 \Rightarrow v_1 = 50 - 0 = 50$$
$$c_{12} = u_1 + v_2 = 42 \Rightarrow v_2 = 42 - 0 = 42$$
$$c_{22} = u_2 + v_2 = 30 \Rightarrow u_2 = 30 - 42 = -12$$
$$c_{23} = u_2 + v_3 = 20 \Rightarrow v_3 = 20 - (-12) = 32$$
$$c_{33} = u_3 + v_3 = 35 \Rightarrow u_3 = 35 - 32 = 3$$

2- إيجاد تكلفة الفرصة البديلة بالنسبة للخلايا الشاغرة، حيث:

$$\Delta_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$$

$$\Delta_{13} = c_{13} - (u_1 + v_3) = 30 - (0 + 32) = -2$$
$$\Delta_{21} = c_{21} - (u_2 + v_1) = 45 - (-12 + 50) = 7$$
$$\Delta_{31} = c_{31} - (u_3 + v_1) = 55 - (3 + 50) = 2$$
$$\Delta_{32} = c_{32} - (u_3 + v_2) = 38 - (3 + 42) = -7$$

u_i	العرض	المستودع 3	المستودع 2	المستودع 1	
$u_1 = 0$	60000	30 [−2]	42 20000	50 40000	المصنع 1
$u_2 = -12$	70000	20 40000	30 30000	45 [7]	المصنع 2
$u_3 = 3$	30000	35 30000	38 [−7]	55 [2]	المصنع 3
		70000	50000	40000	الطلب
		$v_3 = 32$	$v_2 = 42$	$v_1 = 50$	v_j

3- نختار أكبر قيمة (بالسالب) (تكلفة الفرصة البديلة) وهي: $\Delta_{32}=-7$ وهذا بالنسبة للخلية O_3D_2 ، فالمسار المغلق في هذه الحالة هو:

$$O_2D_2 \leftarrow O_2D_3 \leftarrow O_3D_3 \leftarrow O_3D_2$$

أقل قيمة بين موضعين سالبين $(-)$ في المسار المغلق

$Min(30000,30000)=30000$ لذا نقوم بإضافة وطرح قيمة 30000 دج في خلايا المسار تبعا لـ $(+/-)$.

نوضح ذلك في الجدول التالي:

	المستودع D_1 1	المستودع D_2 2	المستودع D_3 3	العرض a_i
المصنع O_1 1	50 40000	42 20000	30	60000
المصنع O_2 2	45	30	20 70000	70000
المصنع O_3 3	55	38 30000	35	30000
الطلب b_j	40000	50000	70000	

والحلول هي كما يلي:

$$x_{11}=40000\ ,\ x_{12}=20000$$
$$x_{23}=70000\ \ ,\ \ x_{32}=30000\ .$$

نحسب إجمالي تكاليف النقل طبقا للجدول السابق:

$$T=40000\times50+20000\times42+70000\times20$$
$$+30000\times38=5380000\ DA$$

نلاحظ أن عدد الحلول 4 أقل من $n+m-1=3+3-1=5$ لذا فأن هذا الحل هو حل غير نظامي solution is degenerate .

لذا سنخصص قيمة وهمية (d) للخلية التي لها أقل تكلفة، نلاحظ أن الخلية O_1D_3 و O_2D_2 لهما أقل تكلفة بالنسبة لباقي الخلايا الشاغرة، نختار واحدة منهما ولتكن O_1D_3، ليصبح شكل الجدول الجديد كما يلي:

	المستودع D_1 1	المستودع D_2 2	المستودع D_3 3	العرض a_i
المصنع O_1 1	50 40000	42 20000	30 d	60000
المصنع O_2 2	45	30	20 70000	70000
المصنع O_3 3	55	38 30000	35	30000
الطلب b_j	40000	50000	70000	

4- نعيد نفس الخطوات من 1 إلى 3:

نضع $u_1=0$ فأن:

$$c_{11}=u_1+v_1=50 \Rightarrow v_1=50-0=50$$
$$c_{12}=u_1+v_2=42 \Rightarrow v_2=42-0=42$$
$$c_{32}=u_3+v_2=38 \Rightarrow u_3=38-42=-4$$
$$c_{13}=u_1+v_3=30 \Rightarrow v_3=30-0=30$$
$$c_{23}=u_2+v_3=20 \Rightarrow u_2=20-30=-10$$

5- إيجاد تكلفة الفرصة البديلة بالنسبة للخلايا الشاغرة، حيث:

$$\Delta_{ij}=c_{ij}-(u_i+v_j)$$

$$\Delta_{21} = c_{21} - (u_2 + v_1) = 45 - (-10 + 50) = 5$$
$$\Delta_{22} = c_{22} - (u_2 + v_2) = 30 - (-10 + 42) = -2$$
$$\Delta_{31} = c_{31} - (u_3 + v_1) = 55 - (-4 + 50) = 9$$
$$\Delta_{33} = c_{33} - (u_3 + v_3) = 35 - (-4 + 30) = 9$$

	المستودع 1	المستودع 2	المستودع 3	العرض	u_i
المصنع 1	50 40000	42 20000	30 d	60000	$u_1 = 0$
المصنع 2	45 [5]	30 [−2]	20 70000	70000	$u_2 = -10$
المصنع 3	55 [9]	38 30000	35 [9]	30000	$u_3 = -4$
الطلب	40000	50000	70000		
v_j	$v_1 = 50$	$v_2 = 42$	$v_3 = 30$		

6- نختار أكبر قيمة (بالسالب) (تكلفة الفرصة البديلة) وهي: $\Delta_{22} = -2$ وهذا بالنسبة للخلية O_2D_2 ، فالمسار المغلق في هذه الحالة هو:

$$O_1D_2 \leftarrow O_1D_3 \leftarrow O_2D_3 \leftarrow O_2D_2$$

أقل قيمة بين موضعين سالبين $(-)$ في المسار المغلق

$Min(20000, 70000) = 20000$ لذا نقوم بإضافة وطرح قيمة 20000 دج في خلايا المسار تبعا لـ $(+/-)$.

نوضح ذلك في الجدول التالي:

	المستودع D_1 1	المستودع D_2 2	المستودع D_3 3	العرض a_i
المصنع O_1 1	50 40000	42	30 20000	60000
المصنع O_2 2	45	30 20000	20 50000	70000
المصنع O_3 3	55	38 30000	35	30000
الطلب b_j	40000	50000	70000	

والحلول هي كما يلي:

نلاحظ أن $n+m-1=3+3-1=5$ لذا فأن هذا الحل هو حل نظامي، والحلول هي كما يلي:

$$x_{11}=40000\ ,\ x_{13}=20000\ ,\ x_{22}=20000$$
$$x_{23}=50000\ ,\ x_{31}=30000$$

نحسب إجمالي تكاليف النقل طبقا للجدول السابق:

$$T=40000\times 50+20000\times 30+20000\times 30$$
$$+50000\times 20+30000\times 38=5340000\ DA$$

7- نعيد نفس الخطوات من 1 إلى 3:

نضع $u_1=0$ فأن:

$$c_{13}=u_1+v_3=30\Rightarrow v_3=30-0=30$$
$$c_{23}=u_2+v_3=20\Rightarrow u_2=20-30=-10$$
$$c_{22}=u_2+v_2=30\Rightarrow v_2=30-(-10)=40$$
$$c_{32}=u_3+v_2=38\Rightarrow u_3=38-40=-2$$

إيجاد تكلفة الفرصة البديلة بالنسبة للخلايا الشاغرة، حيث: $\Delta_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$

$$\Delta_{12} = c_{12} - (u_1 + v_2) = 42 - (0 + 40) = 2$$
$$\Delta_{21} = c_{21} - (u_2 + v_1) = 45 - (-10 + 50) = 5$$
$$\Delta_{31} = c_{31} - (u_3 + v_1) = 55 - (-2 + 50) = 7$$
$$\Delta_{33} = c_{33} - (u_3 + v_3) = 35 - (-2 + 30) = 7$$

وحيث أن $\Delta_{ij} \geq 0$ فنعتبر هذا الحل هو الحل النهائي والأمثل، والحلول تكون كما يلي:

$$x_{11} = 40000 \ , \ x_{13} = 20000 \ , \ x_{22} = 20000$$
$$x_{23} = 50000 \ , \ x_{31} = 30000$$

أما إجمالي تكاليف النقل طبقا للجدول السابق:

$$T = 40000 \times 50 + 20000 \times 30 + 20000 \times 30$$
$$+50000 \times 20 + 30000 \times 38 = 5340000 \ DA$$

4-1-3- استخدام طريقة السمبلكس في إيجاد الحل:

نستخدم برنامج Maple في إيجاد الحل:

```
> with(linalg) :
> c := vector([50, 42, 30, 45, 30, 20, 55, 38, 35])
                    c := [ 50  42  30  45  30  20  55  38  35 ]
> x := vector(9) :
> z := dotprod(x, c);
        z := 50 x1 + 42 x2 + 30 x3 + 45 x4 + 30 x5 + 20 x6 + 55 x7 + 38 x8 + 35 x9
> CS := {x[1] + x[2] + x[3] = 60000, x[4] + x[5] + x[6] = 70000, x[7] + x[8] + x[9] = 30000,
  x[1] + x[4] + x[7] = 40000, x[2] + x[5] + x[8] = 50000, x[3] + x[6] + x[9] = 70000};
CS := {x1 + x2 + x3 = 60000, x1 + x4 + x7 = 40000, x2 + x5 + x8 = 50000, x3 + x6 + x9 = 70000, x4 + x5 + x6 = 70000, x7 + x8
     + x9 = 30000}
> with(simplex) :
> sol := minimize(z, CS, NONNEGATIVE);
     sol := {x1 = 40000, x2 = 0, x3 = 20000, x4 = 0, x5 = 20000, x6 = 50000, x7 = 0, x8 = 30000, x9 = 0}
> assign(sol); z;
                              5340000
```

تطبيق:

نفرض أن شركة مختصة في تصنيع السيارات تمتلك أربعة مصانع (S_4, S_3, S_2, S_1) إنتاج في العديد من المناطق وتقوم بتوريد منتجاتها إلى بلدان عدة في العالم، حيث تبلغ قدرة إنتاج هذه المصانع على التوالي: 500 ، 300 ، 200 ، 600 في اليوم، تزود هذه المصنع أربعة زبائن (D_4, D_3, D_2, D_1) ، والذين يبلغ طلبهم 300 ، 300 و، 800 ،200 يوميا، تم توضيح تكلفة النقل (بالأورو) لكل وحدة حسب المسافة (كلم) بين كل مصدر ووجهته في الجدول التالي:

	D_1	D_2	D_3	D_4	**العرض**
S_1	50	60	80	100	300
S_2	30	70	60	90	300
S_3	10	80	30	100	800
S_4	50	20	10	60	200
الطلب	500	300	200	600	

تبحث هذه الشركة على طريقة تزود بها زبائنها عبر هذه المصانع الأربعة بأقل التكاليف، والمطلوب:

- هل المسألة تشكل مسألة نقل ؟
- أوجد الحل بالطرق الثلاث (الزاوية الشمالية الغربية، أقل التكاليف، VAM).
- إيجاد الحل الأمثل باستخدام طريقة المسار المتعرج (استخدم حل أقل التكاليف) و طريقة التوزيع المعدلة (استخدم حل VAM فقط).

حل التطبيق:

$$Min\ Z = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} c_{ij}x_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^{4} b_j = 500 + 300 + 200 + 600 = 1600$$

$$\sum_{i=1}^{4} a_i = 300 + 300 + 800 + 200 = 1600$$

نلاحظ أن العرض مساو للطلب، كما أن كميات العرض والطلب موجبة فهي مسألة نقل.

إيجاد الحل:

1– طريقة الزاوية الشمالية الغربية North–West Corner Method :

بنفس الخطوات السابقة التي شرحناها في مثال الدرس، نعطي الجدول النهائي:

	D_1	D_2	D_3	D_4	العرض
S_1	50 300	60	80	100	300
S_2	30 200	70 100	60	90	300
S_3	10	80 200	30 200	100 400	800
S_4	50	20	10	60 200	200
الطلب	500	300	200	600	

نلاحظ أن $n+m-1=4+4-1=7$ لذا فأن هذا الحل هو حل نظامي، والحلول هي كما يلي:

$$x_{11} = 300\ ,\ x_{21} = 200\ ,\ x_{22} = 100$$
$$x_{32} = 200\ ,\ x_{33} = 200\ ,\ x_{34} = 400\ ,\ x_{44} = 200$$

نحسب إجمالي تكاليف النقل طبقا للجدول السابق:

$$T = 300\times50+200\times30+100\times70+200\times80+$$
$$200\times30+400\times100+200\times60 = 102000\ EU$$

2-طريقة أقل تكلفة Least Cost Method.

بنفس الخطوات السابقة التي شرحناها في مثال الدرس، نعطي الجدول النهائي:

	D_1	D_2	D_3	D_4	العرض
S_1	50	60 300	80	100	300
S_2	30	70	60	90 300	300
S_3	10 500	80	30	100 300	800
S_4	50	20	10 200	60	200
الطلب	500	300	200	600	

نلاحظ أن عدد الحلول هو 5 و $n+m-1=4+4-1=7$ لذا فأن هذا الحل هو حل غير نظاميsolution is degenerate ، والحلول هي كما يلي:

$$x_{12}=300\ ,\ x_{24}=300\ ,\ x_{31}=500$$
$$x_{34}=300\ ,\ x_{43}=200$$

نحسب إجمالي تكاليف النقل طبقا للجدول السابق:

$$T = 300\times60+300\times90+500\times10+$$
$$300\times100+200\times10 = 82000\ EU$$

3-- طريقة فوجل Vogel's Approximation

بنفس الخطوات السابقة التي شرحناها في مثال الدرس، نعطي الجدول النهائي:

	D_1	D_2	D_3	D_4	العرض
S_1	50	60 100	80	100 200	300
S_2	30 300	70	60	90	300
S_3	10 200	80	30 200	100 400	800
S_4	50	20 200	10	60	200
الطلب	500	300	200	600	

نلاحظ أن عدد الحلول هو 7 و $n+m-1=4+4-1=7$ لذا فأن هذا الحل هو حل نظامي، والحلول هي كما يلي:

$$x_{12}=100\ ,\ x_{14}=200\ ,\ x_{21}=300$$
$$x_{31}=200\ ,\ x_{33}=200\ ,\ x_{34}=400$$
$$x_{42}=200$$

نحسب إجمالي تكاليف النقل طبقا للجدول السابق:

$$T=100\times60+200\times100+300\times30+200\times10+$$
$$200\times30+400\times100+200\times20=87000\ EU$$

4-1-4- اختبار الأمْثَلة :

طريقة المسار المتعرج (أو طريقة الحجر المتنقل) Stepping Stone Method:

(باستخدام حل أقل التكاليف):

مثال7:

الحل النهائي الأولي وفق طريق أقل التكاليف:

	D_1	D_2	D_3	D_4	العرض
S_1	50	60 300	80	100	300
S_2	30	70	60	90 300	300
S_3	10 500	80	30	100 300	800
S_4	50	20	10 200	60	200
الطلب	500	300	200	600	

نلاحظ أن عدد الحلول هو 5 و $n+m-1=4+4-1=7$ لذا فأن هذا الحل هو حل غير نظامي، لذا سنخصص كميتين وهميتين (d) بالنسبة للخليتين الشاغرتين التي لهما أقل تكلفة نقل، نلاحظ أن الخليتين S_4D_2,S_3D_3 لهما أقل تكلفة (30 و 40) بالنسبة لباقي الخلايا الشاغرة، ليصبح شكل الجدول الجديد كما يلي:

	D_1	D_2	D_3	D_4	العرض
S_1	50	60 300	80	100	300
S_2	30	70	60	90 300	300
S_3	10 500	80	30 d	100 300	800
S_4	50	20 d	10 200	60	200
الطلب	500	300	200	600	

6- نقوم بإنشاء حلقة مغلقة للخلايا غير المشغولة (الفارغة):

الخلايا الفارغة	المسار المغلق	صافي تغير التكلفة
S_1D_1	$S_1D_1 \rightarrow S_1D_2 \rightarrow S_4D_2 \rightarrow S_4D_3 \rightarrow S_3D_3 \rightarrow S_3D_1$	−20+60−50 20=10−30+10
S_1D_3	$S_1D_3 \rightarrow S_1D_2 \rightarrow S_4D_2 \rightarrow S_4D_3$	−20+60−80 30=10
S_1D_4	$S_1D_4 \rightarrow S_1D_2 \rightarrow S_4D_2 \rightarrow S_4D_3 \rightarrow S_3D_3 \rightarrow S_3D_4$	−20+60−10 −=100−30+10 20
S_2D_1	$S_2D_1 \rightarrow S_2D_4 \rightarrow S_3D_4 \rightarrow S_3D_1$	−100+90−30 30=10
S_2D_2	$S_2D_2 \rightarrow S_2D_4 \rightarrow S_3D_4 \rightarrow S_3D_3 \rightarrow$ $S_4D_3 \rightarrow S_4D_2$	−100+90−70 40=20−10+30
S_2D_3	$S_2D_3 \rightarrow S_2D_4 \rightarrow S_3D_4 \rightarrow S_3D_3$	−100+90−60 40=30
S_3D_2	$S_3D_2 \rightarrow S_3D_3 \rightarrow S_4D_3 \rightarrow S_4D_2$	−10+30−80 40=20
S_4D_1	$S_4D_1 \rightarrow S_4D_3 \rightarrow S_3D_3 \rightarrow S_3D_1$	−30+10−50 60=10
S_4D_4	$S_4D_4 \rightarrow S_4D_3 \rightarrow S_3D_3 \rightarrow S_3D_4$	−30+10−60 20−=100

7- نحدد الخلية غير المشغولة التي تحتوي على أعلى صافي تغير للتكلفة بالسالب (هناك خليتين نختار واحدة ولتكن $S_1D_4 = -20$) ونرسم مسارا مغلقا، وتخصيص (+/−) لخلايا المسار

$S_3D_4 \rightarrow S_3D_3 \rightarrow S_4D_3 \rightarrow S_4D_2 \rightarrow S_1D_2 \rightarrow S_1D_4$ ، ونوضح ذلك في الجدول التالي:

	D_1	D_2	D_3	D_4	العرض
S_1	50	- 60 300	80	100 +	300
S_2	30	70	60	90 300	300
S_3	10 500	80	+ 30 d	- 100 300	800
S_4	50	+ 20 d	- 10 200	60	200
الطلب	500	300	200	600	

للمحافظة على التوازن نلاحظ أن أقل قيمة بين المواضع السالبة $(-)$ في المسار المغلق $Min(200,300,300)=200$ لذا نقوم بإضافة وطرح قيمة 300 أورو في خلايا المسار تبعا لـ $(+/-)$، ليصبح شكل الجدول الجديد كالاتي:

	D_1	D_2	D_3	D_4	العرض
S_1	50	60 100	80	100 200	300
S_2	30	70	60	90 300	300
S_3	10 500	80	30 200	100 100	800
S_4	50	20 200	10	60	200
الطلب	500	300	200	600	

8- نكرر نفس العملية:

نقوم بإنشاء حلقة مغلقة للخلايا غير المشغولة (الفارغة):

الخلايا الفارغة	المسار المغلق	صافي تغير التكلفة
S_1D_1	$S_1D_1 \to S_1D_4 \to S_3D_4 \to S_3D_4 \to S_3D_1$	−100+100−50 40=10
S_1D_3	$S_1D_3 \to S_1D_4 \to S_3D_4 \to S_3D_3$	−100+100−80 50=30
S_2D_1	$S_2D_1 \to S_2D_4 \to S_3D_4 \to S_3D_1$	−100+90−30 30=10
S_2D_2	$S_2D_2 \to S_2D_4 \to S_1D_4 \to S_1D_2$	−100+90−70 20=60
S_2D_3	$S_2D_3 \to S_2D_4 \to S_3D_4 \to S_3D_3$	−100+90−60 40=30
S_3D_2	$S_3D_2 \to S_3D_4 \to S_1D_4 \to S_1D_2$	−100+100−80 20=60
S_4D_1	$S_4D_1 \to S_4D_2 \to S_1D_2 \to S_1D_4 \to S_3D_4 \to S_3D_1$	−100+100−10 80=50−20+60
S_4D_3	$S_4D_3 \to S_4D_2 \to S_1D_2 \to S_1D_4 \to S_3D_4 \to S_3D_3$	−60+20−10 −100+100 20=30
S_4D_4	$S_4D_4 \to S_4D_2 \to S_1D_2 \to S_1D_4$	−60+20−60 0=100

صافي تغير التكلفة أكبر أو يساوي الصفر إذن هذه هي المرحلة النهائية، ويمكن إعتبار الحل السابق هو الأمثل أي أن الحلول هي كما يلي:

$$x_{12} = 100 \ , \ x_{14} = 200 \ , \ x_{24} = 300$$
$$x_{31} = 500 \ , \ x_{33} = 200 \ , \ x_{34} = 100 \ , \ x_{42} = 200$$

نحسب إجمالي تكاليف النقل طبقا للجدول السابق:

$$T = 100\times60 + 200\times100 + 300\times90 + 500\times10 +$$
$$200\times30 + 100\times100 + 200\times20 = 78000\ EU$$

طريقة التوزيع المعدلة(Modified Distribution Method (MODI :

الحل النهائي الأولي وفق طريق فوجل:

	D_1	D_2	D_3	D_4	العرض
S_1	50	60 100	80	100 200	300
S_2	30 300	70	60	90	300
S_3	10 200	80	30 200	100 400	800
S_4	50	20 200	10	60	200
الطلب	500	300	200	600	

نلاحظ أن عدد الحلول مساوية لـ $7 = 1 - 4 + 4 = 1 - n + m$ لذا فأن هذا الحل هو حل نظامي،

8- نقوم بحساب كل من u_i و v_j بالنسبة للخلايا المشغولة، حيث: $u_i + v_j = c_{ij}$.

نضع $u_3 = 0$ فأن:

$$c_{31} = u_3 + v_1 = 10 \Rightarrow v_1 = 10 - 0 = 10$$

بنفس الكيفية مع بقية الخلايا

$$u_2 = 20\ ,\ v_3 = 30$$
$$u_1 = 0\ ,\ v_4 = 100$$
$$u_4 = -40\ ,\ v_2 = 60$$

9- إيجاد تكلفة الفرصة البديلة بالنسبة للخلايا الشاغرة، حيث:

$$\Delta_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$$

$$\Delta_{11} = c_{11} - (u_1 + v_1) = 50 - (0 + 10) = 40$$

بنفس الكيفية مع بقية الخلايا

$\Delta_{13} = 50$, $\Delta_{22} = -10$, $\Delta_{23} = 10$

$\Delta_{24} = -30$, $\Delta_{32} = 20$, $\Delta_{41} = 80$

$\Delta_{43} = 20$, $\Delta_{44} = 0$

نوضح ذلك في الجدول التالي:

	D_1	D_2	D_3	D_4	العرض	u_i
S_1	50	60 100	80	100 200	300	$u_1 = 0$
S_2	30 300	70	60	90	300	$u_2 = 20$
S_3	10 200	80	30 200	100 400	800	$u_3 = 0$
S_4	50	20 200	10	60	200	$u_4 = -40$
الطلب	500	300	200	600		
v_j	$v_1 = 10$	$v_2 = 60$	$v_3 = 30$	$v_4 = 100$		

10- نختار أكبر قيمة (بالسالب)(تكلفة الفرصة البديلة) وهي:

$\Delta_{24} = -30$ وهذا بالنسبة للخلية S_2D_4 ، فالمسار المغلق في هذه الحالة هو:

$$S_2D_4 \rightarrow S_2D_1 \rightarrow S_3D_1 \rightarrow S_3D_4$$

أقل قيمة بين موضعين سالبين $(-)$ في المسار المغلق $Min(300,400) = 300$ لذا

نقوم بإضافة وطرح قيمة 100 دج في خلايا المسار تبعا لـ $(+/-)$.

ليصبح شكل الجدول كما يلي:

	D_1	D_2	D_3	D_4	العرض
S_1	50	60 100	80	100 200	300
S_2	30	70	60	90 300	300
S_3	10 500	80	30 200	100 100	800
S_4	50	20 200	10	60	200
الطلب	500	300	200	600	

نكرر نفس العملية مرة أخرى:

11- نقوم بحساب كل من u_i و v_j بالنسبة للخلايا المشغولة، حيث:

$u_i + v_j = c_{ij}$.

نضع $u_3 = 0$ فأن:

$$c_{31} = u_3 + v_1 = 10 \Rightarrow v_1 = 10 - 0 = 10$$

بنفس الكيفية مع بقية الخلايا

$$u_2 = -10 \ , \ v_3 = 30$$
$$u_1 = 0 \ , \ v_4 = 100$$
$$u_4 = -40 \ , \ v_2 = 60$$

12- إيجاد تكلفة الفرصة البديلة بالنسبة للخلايا الشاغرة، حيث:

$$\Delta_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$$

$$\Delta_{11} = c_{11} - (u_1 + v_1) = 50 - (0 + 10) = 40$$

بنفس الكيفية مع بقية الخلايا

$$\Delta_{11} = 40 \quad , \quad \Delta_{13} = 50 \quad , \quad \Delta_{21} = 30$$
$$\Delta_{22} = 20 \quad , \quad \Delta_{23} = 40 \quad , \quad \Delta_{32} = 20$$
$$\Delta_{41} = 80 \ , \quad \Delta_{43} = 20 \quad , \quad \Delta_{44} = 0$$

وحيث أن $\Delta_{ij} \geq 0$ فأن هذا الحل يعتبر نهائي وأمثل، والحلول هي كما يلي:

$$x_{11} = 100 \ , \ x_{14} = 200 \ , \ x_{24} = 300$$
$$x_{31} = 500 \quad , \quad x_{33} = 200 \quad , \quad x_{34} = 100$$
$$x_{42} = 200$$

نحسب إجمالي تكاليف النقل طبقا للجدول السابق:

$$T = 100\times 60 + 200\times 100 + 300\times 90 + 500\times 10$$
$$+200\times 30 + 100\times 100 + 200\times 20 = 78000\ EU$$

ملاحظة: يوجد احتمال حل بديل لأن $\Delta_{44} = 0$.

استخدام طريقة السمبلكس في إيجاد الحل:

نستخدم برنامج Maple في إيجاد الحل:

```
> with(linalg) :
> c := vector([50, 60, 80, 100, 30, 70, 60, 90, 10, 80, 30, 100, 50, 20, 10, 60])
                    c := [ 50  60  80  100  30  70  60  90  10  80  30  100  50  20  10  60 ]
> x := vector(16) :
> z := dotprod(x, c);
z := 50 x1 + 60 x2 + 80 x3 + 100 x4 + 30 x5 + 70 x6 + 60 x7 + 90 x8 + 10 x9 + 80 x10 + 30 x11 + 100 x12 + 50 x13 + 20 x14
     + 10 x15 + 60 x16
> CS := {x[1] + x[2] + x[3] + x[4] = 300, x[5] + x[6] + x[7] + x[8] = 300, x[9] + x[10] + x[11] + x[12] = 800, x[13] + x[14]
     + x[15] + x[16] = 200,  x[1] + x[5] + x[9] + x[13] = 500, x[2] + x[6] + x[10] + x[14] = 300, x[3] + x[7] + x[11]
     + x[15] = 200, x[4] + x[8] + x[12] + x[16] = 600};
CS := {x1 + x2 + x3 + x4 = 300, x1 + x5 + x9 + x13 = 500, x2 + x6 + x10 + x14 = 300, x3 + x7 + x11 + x15 = 200, x4 + x8 + x12
     + x16 = 600, x5 + x6 + x7 + x8 = 300, x9 + x10 + x11 + x12 = 800, x13 + x14 + x15 + x16 = 200}
> with(simplex) :
> sol := minimize(z, CS, NONNEGATIVE);
sol := {x1 = 0, x2 = 100, x3 = 0, x4 = 200, x5 = 0, x6 = 0, x7 = 0, x8 = 300, x9 = 500, x10 = 0, x11 = 200, x12 = 100, x13 = 0, x14 = 200, x15
     = 0, x16 = 0}
> assign(sol); z;
                                        78000
```

4-2- مسألة التخصيص (التعيين)Assignment Problem :

تعد مسألة التخصيص نوعا معينا من مسلة النقل حيث يكون الهدف هو تخصيص عدد من الموارد لعدد متساو من الأنشطة لتخفيض أو تعظيم الأرباح ، في نموذج التعيين تتلخص مسألته في كيفية توزيع مجموعة من الوظائف على مجموعة من الموظفين ، أو مجموعة من الألات على مجموعة من المهام، بحيث يؤدي ذلك إلى استخدامها بأعلى كفاءة قصد تخفيض التكاليف أو تعظيم الأرباح.

كمية العرض (والطلب) في كل مصدر (ومركز) تساوي بالضبط 1 تكلفة " نقل " العامل إلى الوظيفة في الواقع ، يمكن حل نموذج التخصيص مباشرة كنموذج نقل عادي (أو كمسألة برمجة خطية عادية)، ومع ذلك فإن حقيقة أن جميع قيم العرض والطلب تساوي 1 أدت إلى تطوير طريقة حل بسيطة تسمى الطريقة المجرية التي طورها دينس كونيغ Dénes Kőnig [1]وزملائه، يحتاج الباحث إلى معرفة تكلفة إجراء جميع التعيينات الممكنة فقط، كل مسألة تخصيص لها مصفوفة (جدول) مرتبطة بها، عادة يتم التعبير عن الكائنات (أو الأشخاص) التي يرغب الفرد في تعيينها في الصفوف ، بينما تمثل الأعمدة المهام (أو الأشياء) المخصصة لهم، سيكون العدد الوارد في الجدول هو التكاليف المرتبطة بكل مهمة معينة، وتجدر الإشارة إلى أن مسألة التخصيص تتباين عن مسألة النقل بخاصيتين أولا: مصفوفة التكلفة عبارة عن مصفوفة مربعة وثانيا يكون الحل الأمثل للمسألة أن هناك تخصيص واحد فقط في الصف أو العمود من مصفوفة التكلفة.

4-2- 1- النموذج الرياضي لمسألة التخصيص:

يظهر الجدول التالي مصفوفة البيانات العامة لمسألة التخصيص، وتجدر الإشارة إلى أن مصفوفة البيانات هذه هي نفسها مصفوفة تكلفة النقل باستثناء أن العرض لكل من

[1] - **دينس كونيغ 1884 – 1907 Dénes Kőnig** رياضياتي مجري له مساهمات في نظرية الأشكال " graph theory" ، طور الطريقة المجرية Hungarian method في مسألة التخصيص إنطلقا من نظرية الأشكال.

الموارد والطلب في كل من المراكز يساوي الواحد ، يرجع هذا إلى حقيقة أن التخصيصات تتم على أساس واحد لواحد.

الجدول التالي يوضح مسألة التخصيص:

	الأنشطة (الوظائف)				
الموارد (العاملين ، ألات)	J_1	J_2	....	J_n	العرض a_i
W_1	c_{11}	c_{12}	....	c_{1n}	1
W_2	c_{21}	c_{22}	....	c_{2n}	1
. .	. .	. .	. .	. .	. .
W_n	c_{n1}	c_{n2}	....	c_{nn}	1
الطلب b_j	1	1	....	1	n

نفرض أن x_{ij} تمثل تعيين المورد i للنشاط (الوظيفة) j ، حيث:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{إذا تم تخصيص المورد i للنشاط j} \\ 0 & \text{غير ذلك} \end{cases}$$

النموذج الرياضي لمسألة التخصيص يمكن عرضها كما يلي:

$$Min\ Z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$S/C\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 & \text{لكل i (مورد متاح)} \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 & \text{لكل j (متطلبات النشاط)} \\ x_{ij} = 0 \text{ أو } 1 \text{ لكل i أو j} \end{cases}$$

حيث c_{ij} تمثل تكلفة تعيين المورد i للنشاط (الوظيفة) j .

هناك عدة طرق لحل مسألة التخصيص مثل:

- طريقة العد.
- نموذج النقل.
- الطريقة المجرية.
- طريقة البرمجة الخطية.

أولا: طريقة العد Enumeration method :

في هذه الطريقة يتم إعداد قائمة بجميع التخصيصات الممكنة بين الموارد والأنشطة المحددة، ثم يتم تحديد مهمة تتضمن الحد الأدنى من التكلفة أو الوقت أو المسافة أو الحد الأقصى من الأرباح، إذا كان هناك تكليفان أو أكثر لهما نفس الحد الأدنى للتكلفة أو الوقت أو المسافة ، فإن المسألة لها العديد من الحلول المثلى، يمكن استخدام هذه الطريقة فقط إذا كان عدد المهام أقل حيث أنه يصبح غير مناسب للحسابات اليدوية إذا كان عدد المهام كبيرا.

مثال1:

يرغب مسؤول الموظفين في تعيين ثلاثة موظفين في ثلاثة مناصب فقام بتجربة هؤلاء الموظفين في ثلاث وظائف لمدة شهرين ، وقام بحساب متوسط زمن (بالدقائق) انجاز الخدمة من قبل كل موظف من خلال الوظائف الثلاث، وتحصل على الجدول التالي:

الوظائف / الموظفين	1	2	3
A	8	4	2
B	9	5	5
C	3	8	9

المطلوب:

حدد أفضل تعيين بهدف تقليل تكلفة الانجاز باستخدام طريقة العد.

حل المثال1:

عدد الموظفين 3 ، لذا فأن عدد البدائل يحسب عبر طريقة التبديلات ، حيث:

$$\mathbf{3\ != 3\times2\times1= 6}$$

الجدول التالي يوضح عدد البدائل الممكنة، و عدد الساعات المستغرقة عن كل بديل.

البدائل	الموظفين	إجمالي الساعات
1	$A_1 \ , B_2 \ , C_3$	8+5+9=**22**
2	$A_1 \ , B_3 \ , C_2$	8+5+8=**21**
3	$A_2 \ , B_1 \ , C_3$	4+9+9=**22**

4	A_2 , B_3 , C_1	4+5+3=**12**
5	A_3 , B_2 , C_1	2+5+3=**10**
6	A_3 , B_1 , C_2	2+9+8=**19**

من الجدول نلاحظ أن أفضل بديل هو البديل رقم 5 والذي بموجبه يحدد لنا أفضل تعيين، حيث:

الموظف A ينجز لنا الوظيفة 3.

الموظف B ينجز لنا الوظيفة 2 .

الموظف C ينجز لنا الوظيفة 1 .

إجمالي الساعات المنجزة من خلال هذا التعيين هي 10 ساعات.

الطريقة المجرية Hungarian method :

هي خوارزمية متخصصة لحل مسألة التخصيص، تعتبر إجراء تكراري يحول مصفوفة التكلفة إلى سلسلة من المصفوفات المكافئة حتى يتضح الحل الأمثل، المصفوفة النهائية هي أن تكون جميع المدخلات إما موجبة أو صفرية ويمكن التخصيص باستخدام مدخلات صفرية فقط، هذا التخصيص للتكلفة 0 هو بالضرورة الأمثل.

خطواتها في حالة التدنية تتم على النحو التالي:

1. في كل صف نحدد أقل تكلفة ونطرحها من جميع قيم تكاليف ذلك الصف.
2. في كل عمود نحدد أقل تكلفة ونطرحها من جميع قيم تكاليف ذلك العمود.
3. نقوم بتعيين صفر واحد من كل صف ونضعه بين عارضتين، ثم نقوم بشطب جميع أصفار العمود الواقعة في نفس خانة الصفر المختار (المعين).
4. نقوم بتعيين صفر واحد من كل عمود ونضعه بين عارضتين، ثم نقوم بشطب جميع أصفار الصف الواقعة في نفس خانة الصفر المختار (المعين).
5. إذا كان الصف أو العمود يحتويان على صفرين أو أكثر فنختار واحد بشكل اعتباطي.

6. تستمر العملية إلى أن يتساوى عدد التخصيصات مع عدد الصفوف في هذه الحالة قد توصلنا إلى الحل ، حينئذ نقوم بعملية التعيين وذلك بأخذ القيمة الأصلية المناظرة للصفر المعين بين عارضتين في الجدول.

ملاحظة: في حالة التعظيم الأرباح يتم أولا طرح جميع القيم من أكبر قيمة في الجدول ومن ثم نطبق الخطوات السابقة.

مثال2:

باستخدام المثال السابق(1) فرضا لو كان هناك خمس موظفين و خمسة وظائف مبينة في الجدول أدناه، ما هو أفضل تعيين في هذه الحالة باستخدام الطريقة المجرية ؟

الوظائف / الموظفين	1	2	3	4	5
A	8	4	6	8	6
B	9	7	5	8	8
C	3	8	9	9	9
D	2	3	6	3	4
E	5	3	3	4	5

حل المثال2:

1- نحدد أقل قيمة من كل صف ثم نطرحها من جميع قيم ذلك الصف.

	1	2	3	4	5	
A	8	4	6	8	6	(-4)
B	9	7	5	8	8	(-5)
C	3	8	9	9	9	(-3)
D	2	3	6	3	4	(-2)
E	5	3	3	4	5	(-3)

2- نحدد أقل قيمة من كل عمود ثم نطرحها من جميع قيم ذلك العمود.

	1	2	3	4	5
A	4	0	2	3	0
B	4	2	0	2	1
C	0	5	6	5	4
D	0	1	4	0	0
E	2	0	0	0	0
	0	0	0	(-1)	(-2)

3- مرحلة التعيين.

	1	2	3	4	5
A	4	[0]	2	3	~~0~~
B	4	2	[0]	2	1
C	[0]	5	6	5	4
D	~~0~~	1	4	[0]	~~0~~
E	2	~~0~~	~~0~~	~~0~~	[0]

الحل الأمثل:

الموظفين	الوظائف	الساعات
A	2	4
B	3	5
C	1	3

3	4	**D**
5	5	**E**
20 ساعة	**المجموع**	

هناك حل بديل لو تم تعيين $([0], A(5))$، نبينه في الجدول التالي:

الساعات	**الوظائف**	**الموظفين**
6	5	**A**
5	3	**B**
3	1	**C**
3	4	**D**
3	2	**E**
20 ساعة	**المجموع**	

مثال 3(حالة التعظيم):

مدير تسويق لشركة ما لديه خمسة بائعي وخمس مناطق مبيعات، وبالنظر إلى قدرات الباعة وطبيعة المناطق ، يقدر مدير التسويق أن المبيعات الشهرية (بألاف الدنانير) لكل بائع في كل منطقة ستكون على النحو التالي (مبينة في الجدول)، أوجد أفضل تعيين للباعة في المناطق التي ستؤدي إلى تحقيق أقصى حد من المبيعات.

المناطق / الباعة	1	2	3	4	5
A	160	120	180	240	200
B	250	180	190	300	160
C	500	450	550	400	300
D	220	350	450	600	650
E	200	100	150	160	254

حل المثال3:

1- أول خطوة نقوم بها هي طرح جميع قيم الجدول من أكبر قيمة (650)، بحيث نحصل الجدول التالي:

	1	2	3	4	5
A	490	530	470	410	450
B	400	470	460	350	490
C	150	200	100	250	350
D	430	300	200	50	0
E	450	550	500	490	396

2- نحدد أقل قيمة من كل صف ثم نطرحها من جميع قيم ذلك الصف.

	1	2	3	4	5	
A	80	120	60	0	40	(-410)
B	50	120	110	0	140	(-350)
C	50	100	0	150	250	(-100)
D	430	300	200	50	0	0
E	54	154	104	94	0	(-396)

3- نحدد أقل قيمة من كل عمود ثم نطرحها من جميع قيم ذلك العمود.

	1	2	3	4	5
A	30	20	60	0	40
B	0	20	110	0	140
C	0	0	0	150	250
D	380	200	200	50	0
E	4	54	104	94	0
	(-50)	(-100)	0	0	0

4- مرحلة التعيين.

	1	2	3	4	5
A	30	20	60	[0]	40
B	[0]	20	110	0	140
C	0	[0]	0	150	250
D	380	200	200	50	[0]
E	4	54	104	94	0

نلاحظ أن عدد التعينات تساوي 4 أقل من عدد الصفوف (5)، لذا فهذا الحل ليس أمثليا.

5- تكرار عملية تحسين الحل:

- وضع علامة (✔) بجانب الصف E نظرا لعدم وجود تخصيص فيه.
- وضع علامة (✔) على رأس العمود 5 لأن الصف E به 0 غير معين.
- وضع علامة (✔) بجانب الصف D نظرا لوجود 0 معين ضمن العمود 5.

- لتمييز الصفين D و E عن بقية الصفوف، نقوم بتغطية الصفوف (A و B و C) أما من جانب الأعمدة نقوم بالعكس نغطي فقط العمود المميز بالعلامة (✔).

نوضح كل هذا فيما يلي:

	1	2	3	4	5 (✔) 2	
A	30	20	60	[0]	40	
B	[0]	20	110	0	140	
C	0	[0]	0	150	250	
D	380	200	200	50	[0]	(✔) 3
E	4	54	104	94	0	(✔) 1

6- إنشاء جدول جديد من خلال تحديد أصغر عنصر غير مغطى هنا (4) ، بحيث نقوم بطرحه من كل عنصر بالنسبة للخلايا غير المغطاة بالخطوط المستقيمة ، كما يتم إضافته إلى قيم الخلايا (خلاف الصفرية) التي تتقاطع فيها الخطوط الأفقية مع الخطوط العمودية، ونكرر الخطوة الرابعة.

	1	2	3	4	5
A	30	20	60	[0]	44
B	[0]	20	110	0	144
C	0	[0]	0	150	254
D	376	196	196	46	[0]
E	0	50	100	90	0

نلاحظ أن عدد التعينات تساوي 4 أقل من عدد الصفوف (5)، لذا فهذا الحل كذلك ليس أمثليا.

7- تكرار عملية تحسين الحل:

- وضع علامة (✔) بجانب الصف E نظرا لعدم وجود تخصيص فيه.
- وضع علامة (✔) على رأس العمود1 و 5 لأن الصف E به أصفار غير معينة.
- وضع علامة (✔) بجانب الصف B نظرا لوجود تعيين [0] ضمن العمود 1.
- وضع علامة (✔) بجانب الصف D نظرا لوجود تعيين [0] ضمن العمود 5.
- وضع علامة (✔) على رأس العمود4 لأن الصف B يحوي على 0 في هذا العمود.
- وضع علامة (✔) بجانب الصف A لأن العمود 4 له تعيين [0] في هذا الصف.
- لتمييز الصفوف A و B و D و E عن الصف C، نقوم بتغطية الصف C ، أما من جانب الأعمدة نقوم بالعكس نغطي فقط العمود المميز بالعلامة (✔) هنا الأعمدة (1 و 4 و 5).

نوضح كل هذا فيما يلي:

	1 (✔) 2	2	3	4 (✔) 6	5 (✔) 3	
A	30	20	60	[0]	44	(✔) 7
B	[0]	20	110	0	144	(✔) 4
C	0	[0]	0	150	254	
D	376	196	196	46	[0]	(✔) 5
E	0	50	100	90	0	(✔) 1

8- إنشاء جدول جديد من خلال تحديد أصغر عنصر غير مغطى هنا (20)، بحيث نقوم بطرحه من كل عنصر بالنسبة للخلايا غير المغطاة بالخطوط المستقيمة ، كما يتم إضافته إلى قيم الخلايا (خلاف الصفرية) التي تتقاطع فيها الخطوط الأفقية مع الخطوط العمودية، ونكرر الخطوة الرابعة.

	1	2	3	4	5
A	30	0	40	[0]	44
B	0	[0]	90	0	144
C	0	0	[0]	170	274
D	376	176	176	46	[0]
E	[0]	30	80	90	0

نلاحظ أن عدد التعينات تساوي 5 تساوي عدد الصفوف (5)، لذا فهذا الحل يعتبر أمثل.

الحل الأمثل:

العائد	المناطق	الباعة
240	4	A

B	2	180
C	3	550
D	5	650
E	1	200
	المجموع	**1820**

الحل البديل:

	1	2	3	4	5
A	30	[0]	40	0	44
B	0	0	90	[0]	144
C	0	0	[0]	170	274
D	376	176	176	46	[0]
E	[0]	30	80	90	0

نلاحظ أن عدد التعينات تساوي 5 تساوي عدد الصفوف (5)، لذا فهذا الحل يعتبر أمثل.

الحل الأمثل:

الباعة	المناطق	العائد
A	2	120
B	4	300
C	3	550
D	5	650
E	1	200

1820	المجموع	

4-2- 2- حل مسألة التخصيص عن طريق نموذج النقل:

مثال4 :

نستخدم بيانات المثال (1)، ونختار طريقة أقل التكاليف مع طريقة التوزيع المعدلة لتحسين الحل.

حل المثال4:

الجدول النهائي للحل الأولي (بطريقة أقل التكاليف):

الموظفين	الوظائف			العرض
	1	2	3	
A	d 8	d 4	1 2	1
B	9	1 5	5	1
C	1 3	8	9	1
الطلب	1	1	1	

نلاحظ أن عدد الحلول 3 أقل من $n+m-1=3+3-1=5$ لذا فأن هذا الحل هو حل غير نظامي solution is degenerate ، لذا سنخصص قيمتين وهميتين (d)

للخليتين التي لهما أقل تكلفة $(A,2),(A,1)$، (تكلفة 5 خصصت لها قيمة من قبل لهذا تستثنى).

الحلول هي كما يلي:

$$x_{13} = x_{22} = x_{31} = 1$$

نحسب إجمالي ساعات التخصيص طبقا للجدول السابق:

$$T = 1\times 2 + 5\times 1 + 3\times 1 = 10\ h$$

التحقق من أمثلية الحل باستخدام طريقة التوزيع المعدلة:

13- نقوم بحساب كل من u_i و v_j بالنسبة للخلايا المشغولة، حيث:

$u_i + v_j = c_{ij}$.

نضع $u_A = 0$ فأن:

$$c_{A1} = u_A + v_1 = 8 \Rightarrow v_1 = 8 - 0 = 8$$
$$v_2 = 4\ ,\ u_B = 1\ ,\ v_3 = 2\ ,\ u_C = -5$$

14- إيجاد تكلفة الفرصة البديلة بالنسبة للخلايا الشاغرة، حيث:

$$\Delta_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$$
$$\Delta_{B1} = c_{B1} - (u_B + v_1) = 9 - (1+8) = 0$$
$$\Delta_{B3} = 2\ ,\ \Delta_{C2} = 9\ ,\ \Delta_{C3} = 12$$

	1	2	3	العرض	u_i
A	8	4	2 1	1	$u_A = 0$
B	9	5	5	1	$u_B = 1$

		1			
C	3 1	8	9	1	$u_C=-5$
الطلب	1	1	1		
v_j	$v_1=8$	$v_2=4$	$v_3=2$		

وحيث أن $\Delta_{ij}\geq 0$ فنعتبر هذا الحل هو الحل النهائي والأمثل، والحلول تكون كما يلي:

$$x_{13}=\ x_{22}=x_{31}=1$$

نحسب إجمالي ساعات التخصيص طبقا للجدول السابق:

$$T=1\times 2+5\times 1+3\times 1=10\ h$$

4-2- 3- حل مسألة التخصيص عن طريق السمبلكس:

مثال5 :

نستخدم بيانات المثال (3)، نستخدم برنامج Maple

حل المثال5:

```
with(linalg) :
c := vector([160, 120, 180, 240, 200, 250, 180, 190, 300, 160, 500, 450, 550, 400, 300, 220, 350, 450, 600, 650, 200, 100, 150, 160,
   254])
c := [ 160  120  180  240  200  250  180  190  300  160  500  450  550  400  300  220  350  450  600  650  200  100  150  160  254 ]
x := vector(25) :
z := dotprod(x, c);
:= 160 x1 + 120 x2 + 180 x3 + 240 x4 + 200 x5 + 250 x6 + 180 x7 + 190 x8 + 300 x9 + 160 x10 + 500 x11 + 450 x12 + 550 x13
   + 400 x14 + 300 x15 + 220 x16 + 350 x17 + 450 x18 + 600 x19 + 650 x20 + 200 x21 + 100 x22 + 150 x23 + 160 x24 + 254 x25
CS := {x[1] + x[2] + x[3] + x[4] + x[5] = 1, x[6] + x[7] + x[8] + x[9] + x[10] = 1, x[11] + x[12] + x[13] + x[14] + x[15]
   = 1, x[16] + x[17] + x[18] + x[19] + x[20] = 1,  x[21] + x[22] + x[23] + x[24] + x[25] = 1, x[1] + x[6] + x[11]
   + x[16] + x[21] = 1, x[2] + x[7] + x[12] + x[17] + x[22] = 1, x[3] + x[8] + x[13] + x[18] + x[23] = 1, x[4] + x[9]
   + x[14] + x[19] + x[24] = 1,  x[5] + x[10] + x[15] + x[20] + x[25] = 1};
```

$CS := \{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1, x_1 + x_6 + x_{11} + x_{16} + x_{21} = 1, x_2 + x_7 + x_{12} + x_{17} + x_{22} = 1, x_3 + x_8 + x_{13} + x_{18} + x_{23} = 1, x_4 + x_9 + x_{14} + x_{19} + x_{24} = 1, x_5 + x_{10} + x_{15} + x_{20} + x_{25} = 1, x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} = 1, x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 1, x_{16} + x_{17} + x_{18} + x_{19} + x_{20} = 1, x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 1\}$

```
> with(simplex) :
> sol := maximize(z, CS, NONNEGATIVE);
```

$sol := \{x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 1, x_5 = 0, x_6 = 0, x_7 = 1, x_8 = 0, x_9 = 0, x_{10} = 0, x_{11} = 0, x_{12} = 0, x_{13} = 1, x_{14} = 0, x_{15} = 0, x_{16} = 0, x_{17} = 0, x_{18} = 0, x_{19} = 0, x_{20} = 1, x_{21} = 1, x_{22} = 0, x_{23} = 0, x_{24} = 0, x_{25} = 0\}$

```
> assign(sol); z;
```

1820

الأعلام المذكورة في الفصل الرابع:



ليونيد فيتايفيتش كانتوروفيتش
Leonid Vitaliyevich Kantorovich
1986 -1912



فرانك لورين هيتشكوك
Frank Lauren Hitchcock
1875 - 1957



دينس كونيغ
Dénes Kőnig
1907 – 1884

الفصل الخامس : إدارة المشاريع باستخدام طريقتي بيرت وسيبأم Projects Management with PERT/CPM

تمهيد:

تلعب شبكات الأعمال دورا مهما في إدارة المشاريع، إذ تعتبر من الأساليب الحديثة والمتقدمة، وهناك أنواع عديدة نقتصر على دراسة نوعين وهما:

- طريقة المسار الحرج CPM (Critical Path Method).
- تقنية تقييم ومراجعة البرنامج PERT (Program Evaluation and Review Technique).

تم تطوير طريقة المسار الحرج بالموازاة مع طريقة PERT ، حيث يتم استخدام كلتا الطريقتين في إدارة المشاريع ، هدف الطريقتين هو حساب أطول مسار ممكن للأنشطة التي خططت لها ، ثم استنتاج قيود الزمن المتأصلة في كل نشاط، يمكن لمدير المشروع بعد ذلك فحص هذه المسارات وتحديد الخطوات التي يجب اتخاذها لتجنب تعطل المشروع، استخدام طريقتي CPM وPERT في إدارة وجدولة المشاريع سيوفر للإدارة الوقت والمال، بالإضافة إلى تقليل المواعيد النهائية من خلال البحث عن المهام التي يمكننا تغيير مدتها، ولكن يلزم أن تظل كما هي للوفاء بالموعد النهائي، وأخيرا تقارن التقدم الفعلي بالتقدم المخطط له.

5-1- مفاهيم أساسية:

نلخصها فيما يلي:

5-1-1- المشروع:

هو عبارة عن سلسلة من المهام التي يجب إكمالها لتحقيق نتيجة معينة، حيث يشير مصطلح المشروع إلى " أي مسعى مؤقت ببداية ونهاية محددين"، و اعتمادًا على مدى تعقيده، يمكن إدارته بواسطة شخص واحد أو أكثر.

5-1-2- منهجية طريقتي PERT وCPM

تتكون المنهجية المتبعة في جدولة الشبكة بواسطة PERT،CPM لأي مشروع من المراحل الأربع التالية:

أولا: التخطيط:

وظيفة التخطيط في المشاريع ترتكز على تسطير الأهداف وتوفير الموارد اللازمة لتحقيقها، يبدأ تقسيم المشروع الكلي إلى مشاريع صغيرة، تنقسم المشاريع الصغيرة إلى أنشطة مختلفة ويتم تحليلها من قبل الأقسام، يتم تحديد وتأسيس علاقة كل نشاط فيما يتعلق بالأنشطة الأخرى.

ثانيا: الجدولة:

الهدف من الجدولة هو إعطاء وقت البدء والانتهاء المبكر والمتأخر المسموح به لكل نشاط، بالإضافة إلى علاقته بالأنشطة الأخرى في المشروع، يجب أن يحدد الجدول الزمني المسار الحرج ، أي الأنشطة الزمنية التي تتطلب اهتماما خاصا إذا كان المشروع سيكتمل في الوقت المناسب.

ثالثا: تخصيص الموارد:

يتم تخصيص الموارد لتحقيق الهدف المنشود، المورد هو متغير مادي مثل العمالة والتمويل والمعدات وما إلى ذلك، والتي ستفرض قيودًا على إكمال المشروع.

رابعا: المراقبة:

المرحلة النهائية في إدارة المشروع هي المراقبة بعد وضع خطة الشبكة وتحديد المسار الحرج ، يتم التحكم في المشروع عن طريق التحقق من التقدم مقابل الجدول الزمني ، وتعيين وجدولة القوى العاملة والمعدات وتحليل آثار التأخير، و يتم ذلك من خلال تقرير مرحلي من وقت لأخر وتحديث الشبكة بشكل مستمر، يتم استخدام مخطط السهم والمخططات الزمنية لإنجاز تقارير مرحلية دورية.

5-2- عناصر أساسية في تحليل الشبكة:

تحليل الشبكة يطلق على التقنيات المحددة التي يمكن استخدامها لتخطيط وإدارة ومراقبة المشاريع، تتمثل إحدى الطرق الأساسية لطريقتي PERT و CPM في استخدام أنظمة الشبكة كوسيلة لرسم بياني للمشاريع المقترحة في مخطط ، أول شيء نقوم به هو رسم مخطط سهمي يوضح التبعيات المتبادلة وعلاقة الأسبقية بين أنشطة المشروع، قبل توضيح التمثيل الشبكي للمشروع وجب تحديد بعض التعريفات الأساسية:

5-2-1- النشاط:

النشاط هو أحد مراحل خطة إدارة المشروع، كل نشاط له بداية ونهاية محددان، بالإضافة إلى موعد نهائي أو فترة زمنية يجب إكمالها، عندما نريد تخطيط لمشروع ما، فإن إحدى الخطوات الأساسية هي تحديد الأنشطة المطلوبة لتحقيق هذا المشروع .

يمكن تقسيمه إلى أربعة أنواع:

أ) **النشاط السابق:** هو النشاط الذي يجب إتمامه مباشرة قبل بدء نشاط أخر.

ب) **النشاط الموالي:** هو النشاط الذي لا يمكن البدء فيه حتى يتم الانتهاء من واحد أو أكثر من الأنشطة الأخرى .

ج) **النشاط المتزامن:** يعرف النشاط الذي يمكن إنجازه في نفس الوقت بالنشاط المتزامن.

د) **النشاط الوهميDummy activity:** هو النشاط الذي لا يستهلك أي نوع من الموارد، فهو يستخدم لإعطاء النشاط منطقا في الشبكة.

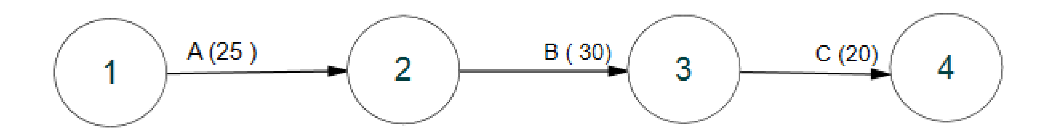
يتم إدراج النشاط الوهمي في الشبكة للأسباب التالية:

- جعل الأنشطة ذات نقاط البداية والنهاية المشتركة قابلة للتمييز.
- تحديد وحفظ علاقة الأسبقية المناسبة بين الأنشطة التي لا ترتبط بالأحداث.
- لا يمكن أن يكون لنشاطين نفس حدث البداية وحدث النهاية، وعند تعرضنا لمثل هذه الحالة نلجأ إلى استخدام الأنشطة الوهمية والتي تساعد في الحفاظ على منطق الشبكة.

مثال1: (التمثيل البياني لبعض الأنشطة)

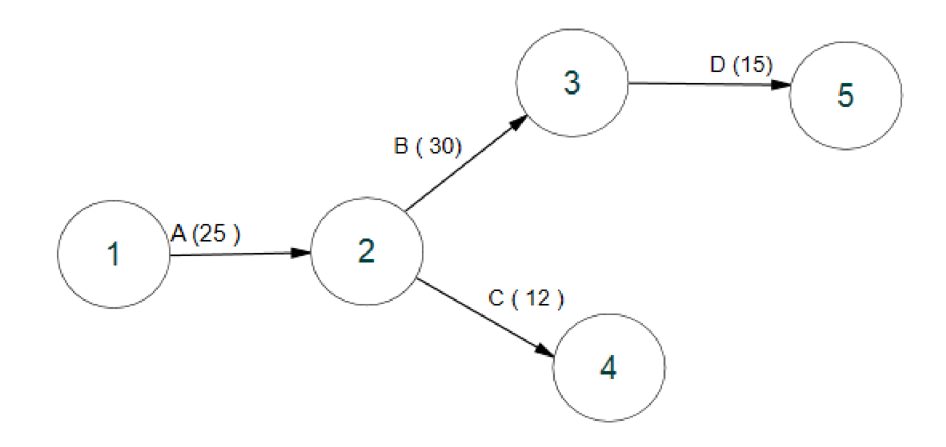
الأنشطة المتتابعة:

النشاط B لا يبدأ إلا إذا انتهى النشاط A (A يسبق B)، والنشاط C لا يبدأ إلا إذا انتهى النشاطين A و B (A و B يسبقان C).



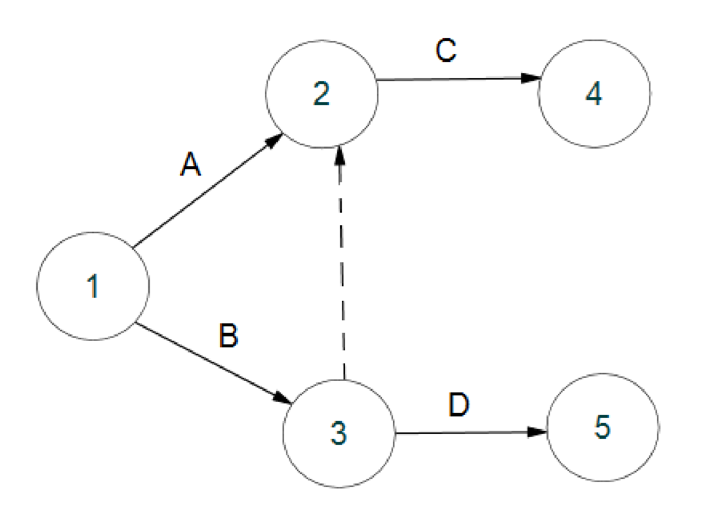
الأنشطة المتزامنة:

النشاط D لا يبدأ إلا إذا انتهى النشاط B، أو بعبارة أخرى النشاط D يبدأ فقط إلا إذا انتهى B و C.



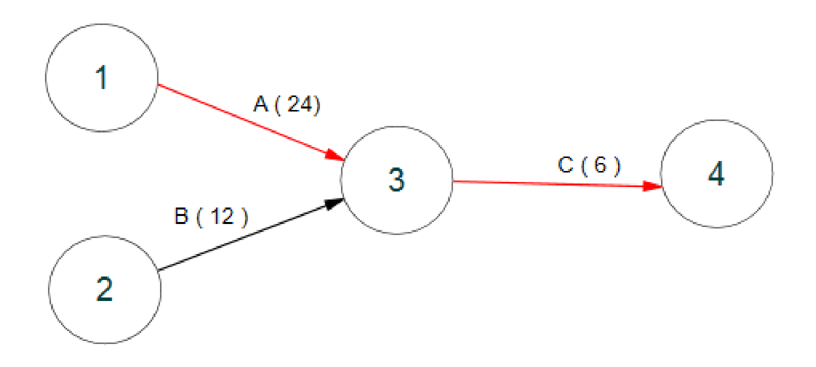
النشاط الوهمي:

نعتبر النشاطين "A" و "B" أنشطة متزامنة ويعتمد النشاط "D" على "B" ويعتمد "C" على كل من "A" و "B" ، يمكن التعامل مع هذا الموقف باستخدام نشاط وهمي، نوضحه في الشكل البياني التالي:



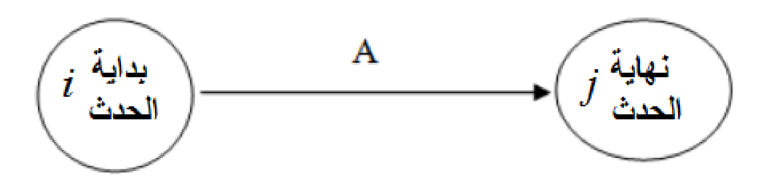
الأنشطة المتقاربة:

يمكن أن تنتهي العديد من النشاطات في نفس الخطوة، لنأخذ مثال: النشاط A زمنه 24 يوم ، والنشاط B زمنه 12 يوم والنشاط C زمنه 6 ، فالمسار الحرج له أطول مدة (24+6 = 30) موضح باللون الأحمر.



5-2-2- الحدث:

يشير هذا المصطلح إلى محدد مندرج في دورة حياة المشروع، بحيث أن مجمل المشروع في الواقع هو مجرد سلسلة متكونة من حدث تلو الأخر ، تسمى نقطتا البداية والنهاية للنشاط بالحدث أو العقدة أو الموصل، عادة ما يتم تمثيل ذلك من خلال دائرة في شبكة تكتب في داخلها (رقم أو حرف)، تمثل ترتيب الحدث في الشبكة ، وقد يكون الحدث فرديا حينما يكون نتيجة لنشاط واحد ، وقد يكون مركبا حينما يكون نتيجة لعدة أنشطة ، يمكن توضيح الحدث في الشكل البياني التالي: البداية



نبرز الأن الاختلاف بين النشاط والحدث فيما يلي:

- الحدث هو تلك اللحظة المحددة من الزمن التي يتم فيها تحقيق جزء معين من المشروع، بينما يكون النشاط هو الأداء الفعلي للمهمة.

- يتطلب نشاط ما الوقت والموارد لإتمامه.

- يتم وصف النشاط عمومًا بكلمات الانجاز ، البدء ، التأخير ، وما إلى ذلك .

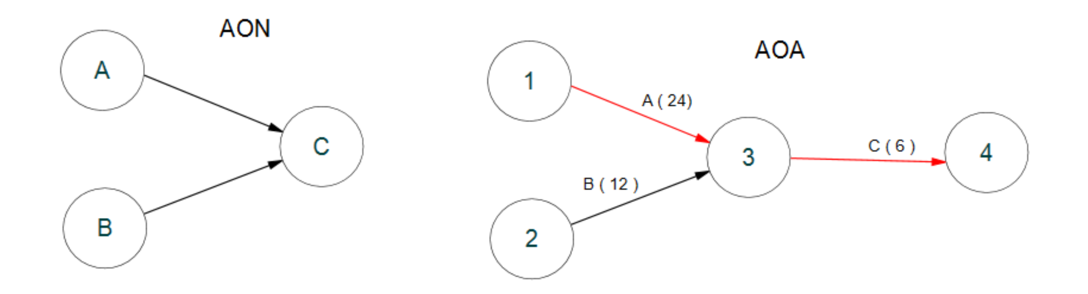
- أثناء رسم الشبكات، من المفترض أن الحركة تتم من اليسار إلى اليمين.

- إن النشاط (i–j) يعني أن العمل يبدأ في الحدث (i) ويكتمل في الحدث (j).

5–2–3– خصائص الشبكة:

هناك مقاربتان تستخدمان لرسم الشبكة الأولى تسمى الأنشطة بالعقد (Activity on node (AON)) ، والثانية بالأنشطة بالتسلسل (Activity on Arrow (AOA))، في الأولى العقد تمثل الأنشطة ، وفي الثانية الأسهم تثمل الأنشطة.

ونوضح النوعين في الشكل البياني التالي:



تطبيق 1:

الجدولين التاليين يظهران لنا نشاطات رئيسية متعلقة بإنجاز مشروعان.

الجدول رقم (1):

الأنشطة	الأنشطة السابقة
A	–
B	–
C	A
D	A,B
E	B
F	E
G	D , F
H	G

الجدول رقم (2):

الأنشطة	الأنشطة السابقة
A	–
B	–
C	–
D	C
E	C
F	A , B
G	A
H	G
I	F
J	H,I

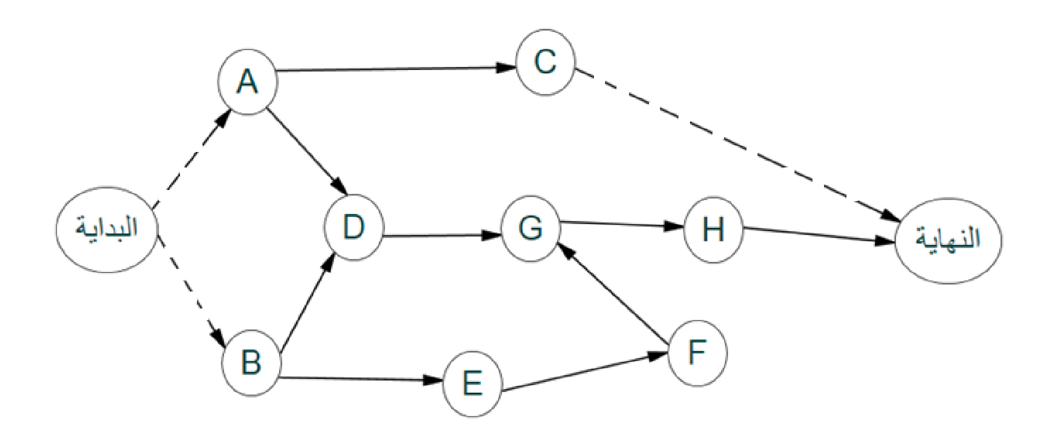
المطلوب:

رسم شبكة الأعمال بطريقتي : الأنشطة بالعقد (Activity on node (AON)) ، والأنشطة بالتسلسل (Activity on Arrow (AOA)).

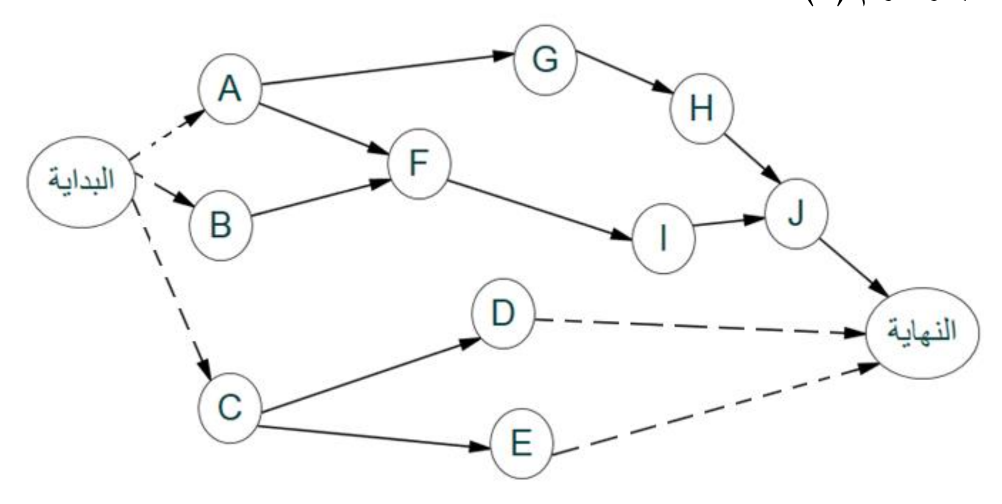
حل التطبيق1:

رسم شبكة الأعمال بطريقة الأنشطة بالعقد AON:

الجدول رقم (1):



الجدول رقم (2):



رسم شبكة الأعمال بطريقة الأنشطة بالتسلسل AOA :

الجدول رقم (1):

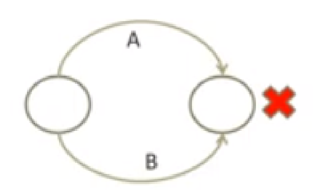
أولا: نحدد الأنشطة اللاحقة

الأنشطة	الأنشطة السابقة	الأنشطة اللاحقة
A	–	C,D
B	–	D,E
C	A	–
D	A,B	G
E	B	F
F	E	G
G	D , F	H
H	G	–

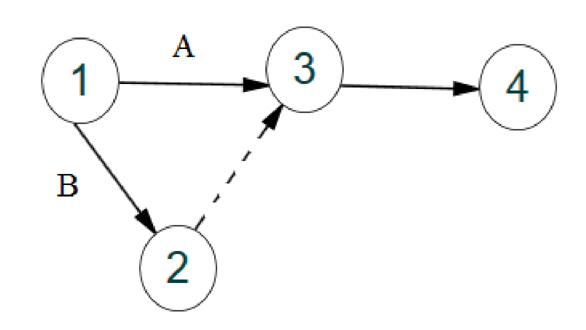
ثانيا: نقوم برسم البداية والنهاية، حيث نحدد بعد البداية الأنشطة التي لم يسبقها أي نشاط (في مثالنا هذا نجد النشاطين A و B)، بالنسبة لرسم الأنشطة قبل النهاية تكون للأنشطة التي لا توجد لها لواحق (هنا نجد نشاطين : C وH)، باقي الأنشطة يتم رسمها بنفس الكيفية.

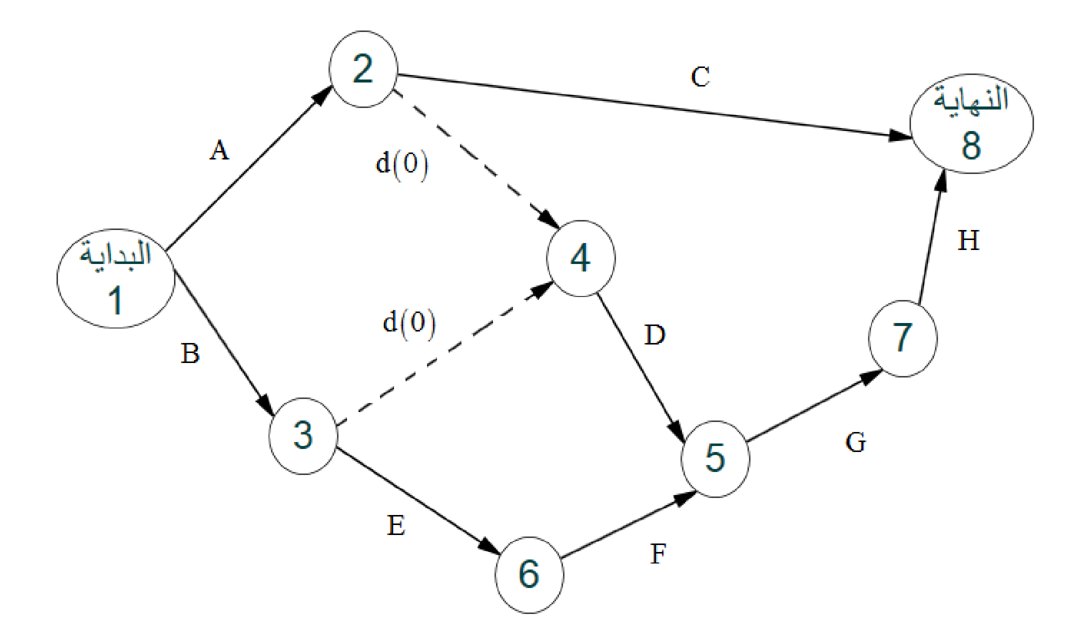
ملاحظة:

تم استخدام النشاط الوهمي في هذا المثال لأنه من قواعد رسم الشبكة بطريقة **AOA:** **يمكن توصيل عقدتين بواسطة قوس واحد على الأكثر.**



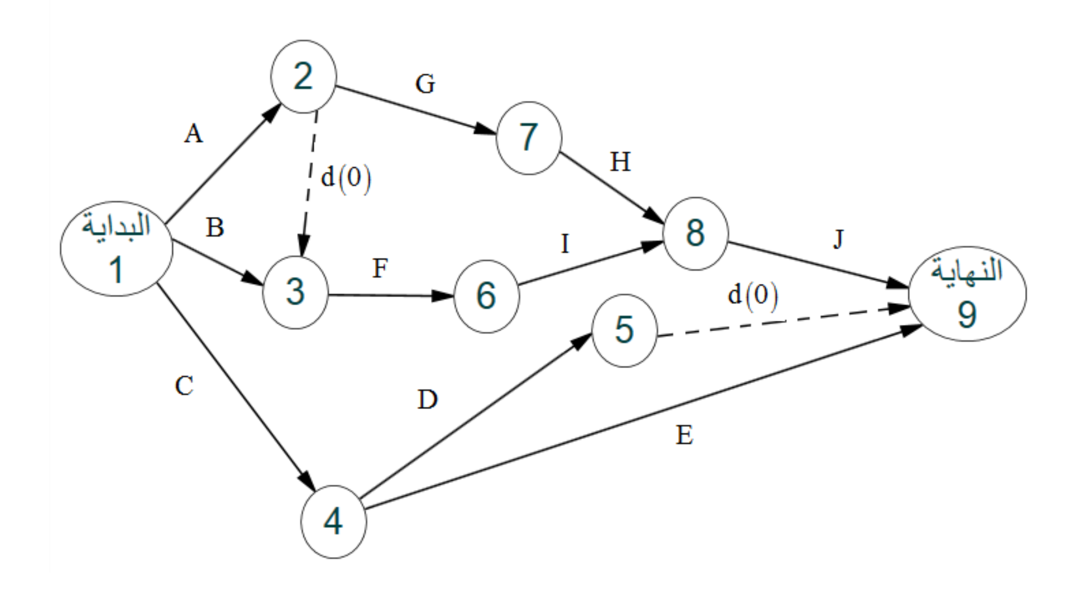
فتمثيل النشاط الوهمي في هذه الحالة يكون على النحو الاتي:





الجدول رقم (2):

الأنشطة	الأنشطة السابقة	الأنشطة اللاحقة
A	–	F,G
B	–	F
C	–	D,E
D	C	–
E	C	–
F	A , B	I
G	A	H
H	G	J
I	F	J
J	H,I	–



5-3- طريقة المسار الحرج : CPM (Critical Path Method) [1]

تهدف هذه الطريقة إلى التخطيط والتحكم في عدد كبير من الأنشطة المعقدة المتعلقة بالتصميم والبناء وما إلى ذلك، ويعرف المسار الحرج بأنه أطول المسارات زمنا، حيث أن المسار هو النشاطات المتعاقبة من بداية الشبكة حتى نهايتها.

ترميز :

الأزمنة المبكرة: وتسمى بالحسابات الأمامية وتنقسم إلى:

زمن البدء المبكر ES ، زمن الانجاز المبكر EF .

الأزمنة المتأخرة: وتسمى بالحسابات الخلفية وتنقسم إلى:

زمن البدء المتأخر: LS ، زمن الانجاز المتأخر LF .

5-3-1- مفاهيم أساسية حول طريقة المسار الحرج:

لفهم فلسفة المسار الحرج بشكل صحيح، نحتاج أولاً إلى فهم المصطلحات المختلفة المستخدمة في هذه الطريقة ونبرزها فيما يلي:

أولا : زمن البدء المبكر Earliest start time ES: هو أقرب وقت يمكن أن يبدأ فيه نشاط في مشروع ما، لا يمكننا تحديد ذلك دون معرفة ما إذا كانت هناك أية نشاطات سابقة أو معرفة القيود الأخرى التي قد تؤثر على بدء هذا النشاط.

ثانيا: زمن البدء المتأخر Latest start time LS: هي اللحظة الأخيرة التي يمكننا فيها بدء نشاط ما قبل التهديد بإلغاء المشروع، ونحتاج إلى حساب هذا الزمن لأجل الحصول على صورة واضحة حول الإطار الزمني للمشروع، يمكننا اجراء هذه الجدولة بشكل أفضل للوفاء بالموعد النهائي.

[1] - تم تطويرها في أواخر الخمسينيات من القرن الماضي بواسطة **Morgan Walker** و **James. E. Kelley** من شركة **DuPont** (شركة كيميائية أمريكية).

ثالثا: زمن الانجاز المبكر Earliest finish time EF: يمكن إتمام النشاط في أقرب وقت ، بناءً على مدته وأقرب وقت بدئه.

رابعا: زمن الانجاز المتأخرLatest finish time LF: يمكن إتمام أحدث نشاط بناءً على مدته وآخر وقت بدئه.

خامسا: التعويم Float : يعرف أيضا باسم الزمن الفائض slack time، والتعويم هو مصطلح يصف المدة التي يمكننا خلالها تأخير نشاط قبل أن تؤثر على الجدول الزمني المخطط له وتهدد الموعد النهائي للمشروع، الأنشطة الموجودة على المسار الحرج لها قيمة عائمة صفرية، إذا كان النشاط يحتوي على عدد عائم أكبر من الصفر ، فهذا يعني أنه يمكن تأخيره دون التأثير على زمن انجاز المشروع.

سادسا: تقليص مدة تنفيذ المشروعCrash duration: يصف هذا المصطلح أقصر زمن يمكن جدولة نشاط فيه، يمكننا الوصول إلى هناك من خلال التنقل بين الموارد وإضافة المزيد في نهاية النشاط لتقليل الزمن اللازم لإتمام النشاط ، غالبًا ما يعني هذا انخفاضًا في الجودة ، ولكنه يستند إلى علاقة بين التكلفة والزمن.

تطبيق2:

الجدول التالي يظهر لنا سبعة نشاطات رئيسية متعلقة بإنجاز مشروع ما، وكذلك المدة اللازمة لإنجاز كل نشاط بالأيام.

الأنشطة	الأنشطة السابقة	المدة اللازمة لتنفيذ المشروع
A	–	5
B	–	9
C	–	7

D	A	6
E	C	8
F	A	7
G	B , D , E	5

المطلوب:

1- رسم شبكة الأعمال.

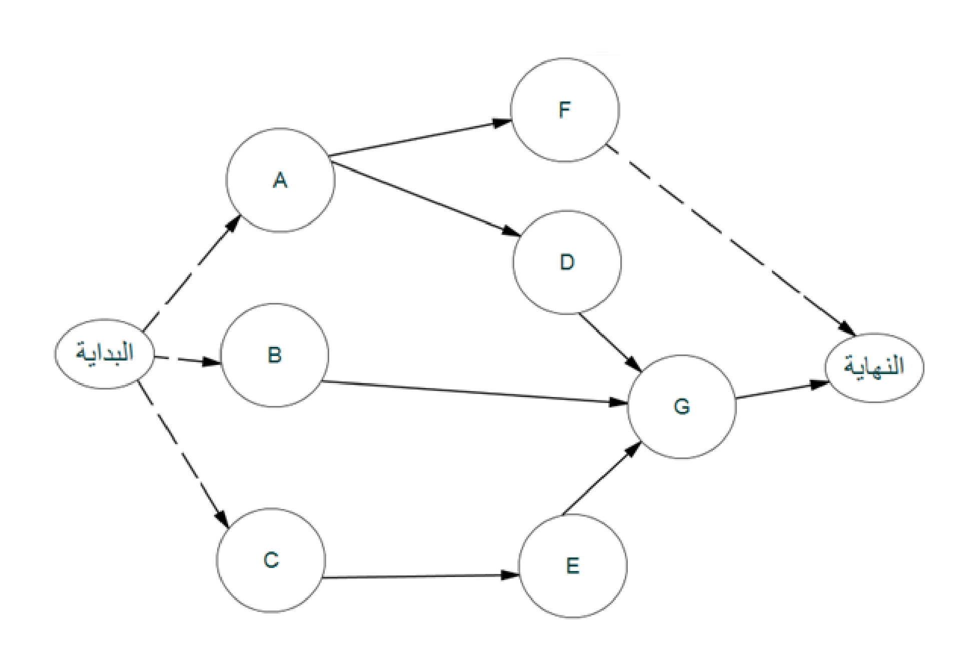
2- حساب الأزمنة المبكرة و الأزمنة المتأخرة لهذا المشروع.

3- ايجاد جدول المراقبة الزمنية للمشروع على الشبكة.

4- تحديد الأنشطة الحرجة وتحديد مدة انجاز المشروع.

حل التطبيق2:

1- **رسم شبكة الأعمال:**



2- حساب الأزمنة المبكرة و الأزمنة المتأخرة لهذا المشروع:

أولا: الأزمنة المبكرة للمشروع:

زمن البدء المبكر لكل نشاط يكون وفق ما يلي:

زمن البدء المبكر لأول نشاط يساوي الصفر، أما زمن البدء المبكر للنشاط الموالي= الزمن المبكر للنشاط السابق + مدة تنفيذ النشاط.

زمن الانجاز المبكر = زمن البدء المبكر + مدة تنفيذ النشاط.

نوضح ذلك بالمعادلات التالية:

$$EF = ES_{(i,j)} + t_{(i,j)}$$

زمن البدء المبكر نبينه في الجانب الأيسر، أما زمن الانجاز المبكر فنضعه في الجانب الأيمن في مخطط كل نشاط (الدائرة)، والتي تم حسابها كما يلي:

الأنشطة	الأزمنة المبكرة لبداية المشروع
A	0
B	0
C	0
D	0+5=5
E	0+7=7
F	0+5=5
G	$Max\left[(5+6=11);(0+9=9);(7+8=15)\right]=15$

أما زمن الانجاز المبكر نأخذ مثالا للأنشطة A و B .

زمن الانجاز المبكر للنشاط A = 0 + 5 = 5.

زمن الانجاز المبكر للنشاط D = 5 + 6 = 11، ونفس الشيء بالنسبة لبقية الأنشطة.

ثانيا: الأزمنة المتأخرة:

نبدأ بحساب زمن الانجاز المتأخر LF ، والذي يكون في الجدول التالي:

الأزمنة المتأخرة لنهاية المشروع	الأنشطة
20	G
20	F
15 =5−20	E
15 =5−20	D
7= 8−15	C
15 =5−20	B
$Min\left[(20-7=13);(15-6=9)\right]=9$	A

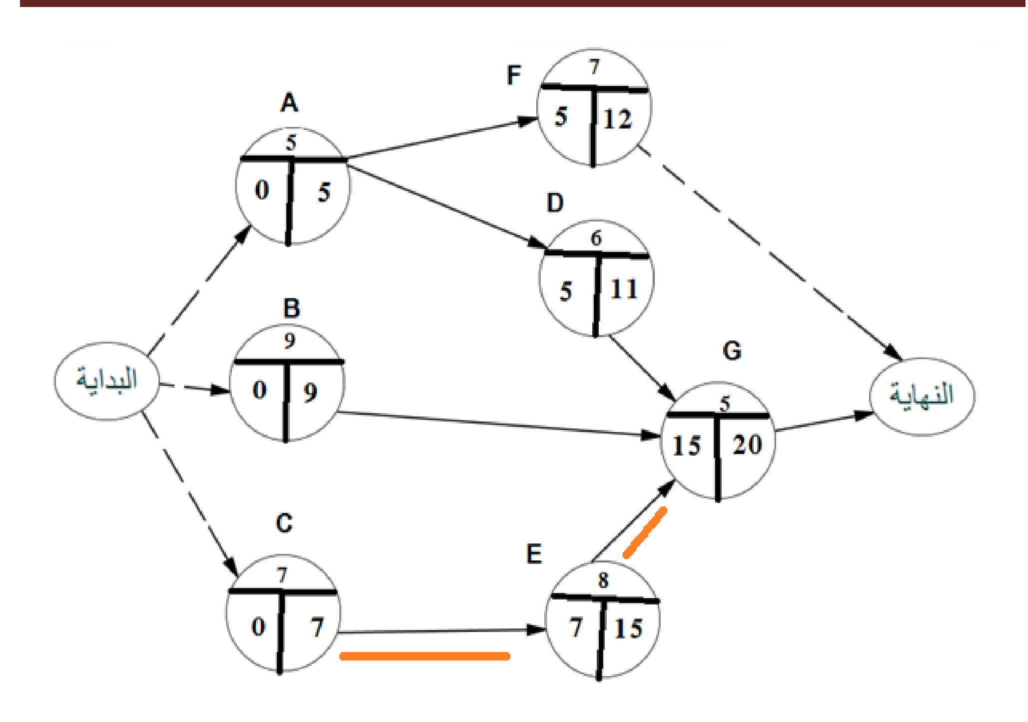
أما زمن البدء المتأخر LS يساوي زمن الانجاز المتأخر – مدة التنفيذ، ونوضح ذلك وفق المعادلة التالية:

$$LS_{(i,j)} = LF_{(i,j)} - t_{(i,j)}$$

3- ايجاد جدول المراقبة الزمنية للمشروع:

الأنشطة	الأنشطة السابقة	مدة التنفيذ المشروع t	الأزمنة المبكرة		الأزمنة المتأخرة		الزمن الفائض	النشاط الحرج
			ES	EF	LS	LF		
A	-	5	0	5	4	9	4	
B	-	9	0	9	6	15	6	
C	-	7	0	7	0	7	0	حرج
D	A	6	5	11	9	15	4	
E	C	8	7	15	7	15	0	حرج
F	A	7	5	12	13	20	8	
G	B , D , E	5	15	20	15	20	0	حرج

أما المراقبة الزمنية للمشروع على الشبكة فيكون على النحو الاتي:



يظهر في جدول الأنشطة التي تتوقف عليها مدة تنفيذ المشروع وهي: C,E,G ، و أي تأخر في أحدها سوف يؤدي إلى تأخر مدة تنفيذ المشروع عن 20 يوم، نوضح ذلك في الجدول التالي:

الأنشطة	مدة التنفيذ
C	7 أيام
E	8 أيام
G	5 أيام

كما ينبغي التركيز عليها وإعطائها أهمية بالغة لإنجازها في أجالها المحددة (المسار الحرج نوضحه بخط أحمر).

تطبيق3:

الجدول التالي يوضح لنا مجموعة من الأنشطة التي يتكون منها مشروع انجاز بناية معينة، بالإضافة إلى المدة اللازمة لإنجاز كل نشاط بالأيام.

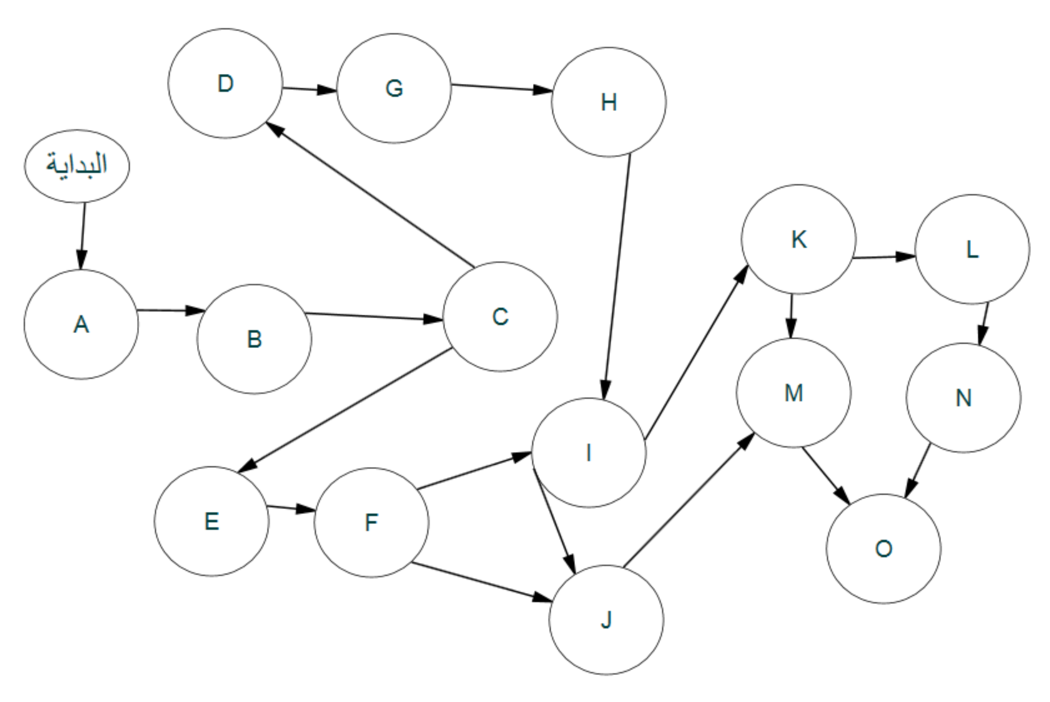
الرقم	الأنشطة	الرمز	المدة اللازمة لتنفيذ المشروع	الأنشطة السابقة
1	الأعمال التحضيرية	A	6	–
2	أعمال الحفر	B	10	A
3	أعمال الأساس	C	20	B
4	أعمال هيكل الأعمدة1	D	24	C
5	أعمال هيكل الأعمدة2	E	12	C
6	أعمال السقف	F	24	E
7	أعمال الصرف الصحي	G	20	D
8	أعمال التبليط	H	34	G
9	أعمال الجبس	I	40	F, H
10	أعمال التمديدات الكهربائية	J	50	F, I
11	أعمال تركيب1 (أبواب، نوافذ،...)	K	36	I
12	أعمال تركيب2 (زجاج، ،...)	L	30	K
13	أعمال الدهن	M	60	J, K
14	أعمال تكميلية 1	N	20	L
15	أعمال تكميلية 2	O	12	M, N

المطلوب:

1- رسم شبكة الأعمال.
2- حساب الأزمنة المبكرة و الأزمنة المتأخرة لهذا المشروع.
3- ايجاد جدول المراقبة الزمنية للمشروع على الشبكة.
4- تحديد الأنشطة الحرجة وتحديد مدة انجاز المشروع.

حل التطبيق3:

1- رسم شبكة الأعمال:



2-حساب الأزمنة المبكرة و الأزمنة المتأخرة لهذا المشروع:

أولا: الأزمنة المبكرة للمشروع:

زمن البدء المبكر لكل نشاط مبين وفق الجدول التالي:

الأزمنة المبكرة لبداية المشروع	الأنشطة
0	A
6=6+0	B
16=10+6	C
36=20+16	D
36=20+16	E

48=12+36	F
60=24+36	G
80=20+60	H
$Max[(114\ ;\ 72)]=114$	I
$Max[(154\ ;\ 72)]=154$	J
154 = 40+114	K
190 = 36+154	L
$Max[(190\ ;\ 204)]=204$	M
220 = 30+190	N
$Max[(264\ ;\ 240)]=264$	O

أما زمن الانجاز المبكر نأخذ مثالا للأنشطة A و B .

زمن الانجاز المبكر للنشاط A : 0 + 6 = 6

زمن الانجاز المبكر للنشاط D : 36 + 24 = 60، ونفس الشيء بالنسبة لبقية الأنشطة.

ثانيا: الأزمنة المتأخرة:

نبدأ بحساب زمن الانجاز المتأخر LF ، والذي يكون في الجدول التالي:

الأزمنة المتأخرة لنهاية المشروع	الأنشطة
276	O
264 = 12−276	N
264 = 12 −276	M
244 = 20−264	L
204 = 60 – 264	K

J	204 = 60 − 264
I	$Min\left[\left(168\ ;\ 154\right)\right]=154$
H	114 = 40−154
G	80 = 34 − 114
F	$Min\left[\left(114\ ;\ 154\right)\right]=114$
E	90 = 24 −114
D	60 = 20−80
C	$Min\left[\left(36\ ;\ 78\right)\right]=36$
B	16 = 20−36
A	6 = 10−16

أما زمن البدء المتأخر LS يساوي زمن الانجاز المتأخر – مدة التنفيذ، ونوضح ذلك وفق المعادلة التالية:

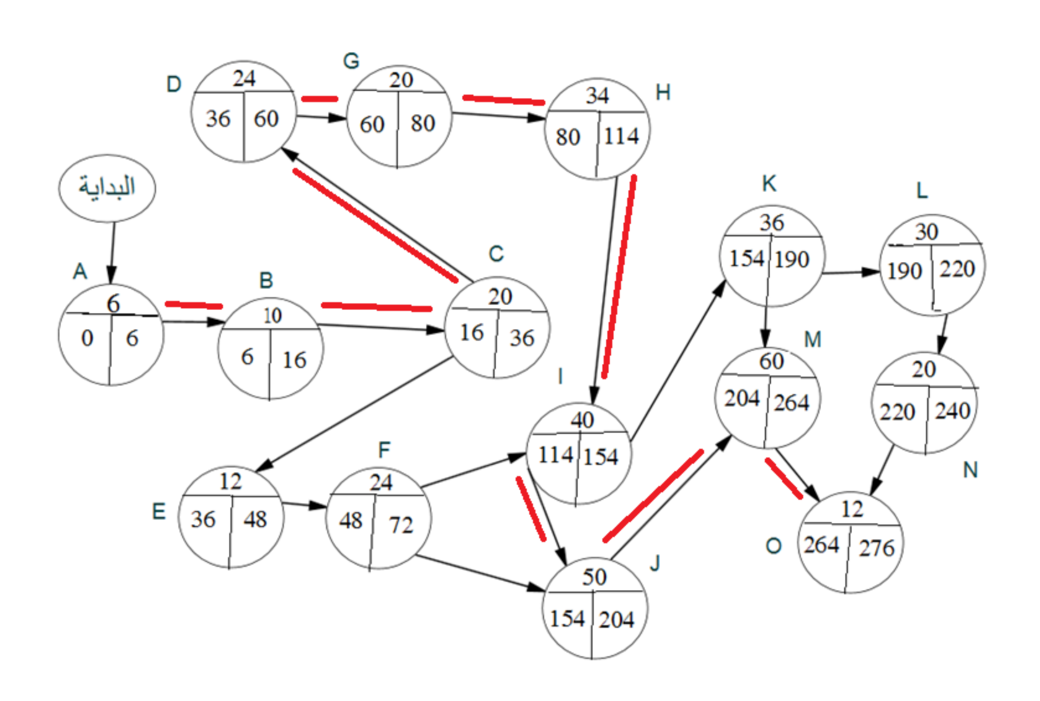
$$LS_{(i,j)} = LF_{(i,j)} - t_{(i,j)}$$

3− ايجاد جدول المراقبة الزمنية للمشروع:

الأنشطة	الأنشطة السابقة	مدة التنفيذ المشروع t	الأزمنة المبكرة		الأزمنة المتأخرة		الزمن الفائض	النشاط الحرج
			ES	EF	LS	LF		
A	-	6	0	6	0	6	0	حرج
B	A	10	6	16	6	16	0	حرج
C	B	20	16	36	16	36	0	حرج
D	C	24	36	60	36	60	0	حرج
E	C	12	36	48	78	90	42	
F	E	24	48	72	90	114	42	
G	D	20	60	80	60	80	0	حرج
H	G	34	80	114	80	114	0	حرج
I	F, H	40	114	154	114	154	0	حرج

J	F, I	50	154	204	154	204	0	حرج
K	I	36	154	190	168	204	14	
L	K	30	190	220	214	244	24	
M	J, K	60	204	264	204	264	0	حرج
N	L	20	220	240	244	264	24	
O	M, N	12	264	276	264	276	0	حرج

أما المراقبة الزمنية للمشروع على الشبكة فيكون على النحو الاتي:



يظهر في جدول الأنشطة التي تتوقف عليها مدة تنفيذ المشروع وهي:

A,B,C,D,G,H,I,J,

M ,O ، و أي تأخر في أحدها سوف يؤدي إلى تأخر مدة تنفيذ المشروع عن 274 يوم، نوضح ذلك في الجدول التالي:

الأنشطة	مدة التنفيذ
A	6 أيام
B	10 أيام
C	20 أيام
D	24 أيام
G	20 أيام
H	34 أيام
I	40 أيام
J	50 أيام
M	60 أيام
O	12 أيام

كما ينبغي التركيز عليها وإعطائها أهمية بالغة لإنجازها في أجالها المحددة (المسار الحرج نوضحه بخط أحمر).

5-4- تقنية تقييم ومراجعة البرنامج PERT:

في هذه الطريقة يتم فيها التخطيط والتنظيم والتنسيق والتحكم في الأنشطة غير المؤكدة، تقوم هذه التقنية بدراسة وتمثيل المهام التي تم القيام بها لإتمام المشروع، وتحديد الحد الأدنى من الوقت المطلوب لإتمام المشروع بأكمله، تم تطويرها في أواخر الخمسينيات من القرن الماضي من طرف البحرية الأمريكية وتهدف إلى تقليل وقت وتكلفة المشروع.

تستخدم طريقة PERT الزمن كمتغير يمثل تطبيق الموارد المجدولة بمواصفات الأداء، و في هذه التقنية ينقسم المشروع إلى أنشطة وأحداث، بعد ذلك يتم التحقق من هذا التسلسل الصحيح ويتم بناء شبكة، بعد هذا الوقت المطلوب لكل نشاط يتم حسابه وتحديد المسار الحرج (أطول مسار يربط بين جميع الأحداث).

5-4-1- استخدام طريقة بيرت في إدارة المشاريع:

تستخدم طريقة PERT بشكل شائع للمشاريع البحثية أو البرامج التي لم يتم تنفيذها مسبقا، هذا يعني أنه عندما لا يكون لدى المنظمة أي خبرة في تنفيذ برنامج أو العمل في مشروع معين ، فإن PERT تثبت أنها أداة إحصائية مناسبة.

عندما تتعهد المنظمة بمشروع جديد، يصبح من الصعب تحديد الوقت الذي يجب أن يكتمل فيه المشروع، لذلك ولتوفير الموعد النهائي لكل نشاط مندرج في المشروع وتوجيهه بشأن تسلسل جميع الأنشطة، يعتبر تحليل PERT هو الطريقة الأكثر ملائمة.

إنها أيضا أداة مفيدة لإعداد ميزانية لمثل هذا المشروع، وذلك لأن وجود فكرة عن المدة المقدرة سيساعد الإدارة على التأكد من الحاجة إلى الموارد المالية والبشرية.

تقدير مدة تنفيذ المشروع:

يُطلق على المدة التي يُفترض أنها مطلوبة لإنجاز نشاط محدد بالمدة المقدرة.

5-4-2- مكونات تحديد المدة المقدرة:

في الطريقة المذكورة أعلاه، تلعب العناصر التالية دورًا مهمًا:

أولا: تقدير الوقت المتفائل (Optimistic Time Estimate) : امتلاك موقف إيجابي للغاية ، هذا هو أقل وقت ممكن يمكن خلاله إتمام نشاط معين.

ثانيا: تقدير الوقت الأكثر احتمالاً (Most Likely Time Estimate) : إنه نهج متوازن ، يقدر الوقت الأنسب لإتمام أي نشاط.

ثالثا : تقدير الوقت المتشائم (Pessimistic Time Estimate): بالنظر إلى جميع الجوانب السلبية، فهو أعلى تقدير زمني ممكن لتنفيذ نشاط معين.

رابعا: التباين Variance :

في تحليل PERT يطلق على مستوى تقلب الوقت المطلوب للقيام بنشاط ما من متوسط الوقت تباينا .

كما ذكرنا سابقا فأن زمن انجاز الأنشطة احتمالي ، لذلك نستخدم قيم زمنية معينة ، لإيجاد الزمن المتوقع لإنجاز الأنشطة و كذلك التباين نستخدم الصيغ التالية:

$$t_e = \frac{a+4m+b}{6}$$

$$\sigma_t^2 = \left(\frac{b-a}{6}\right)^2$$

b: الوقت المتشائم ، m : الوقت الأكثر احتمالا ، a : الوقت المتفائل.

مبرهنة:

لإيجاد الزمن المتوقع لإنجاز الأنشطة $t_e = \frac{a+4m+b}{6}$ ، و كذلك التباين $\sigma_t^2 = \left(\frac{b-a}{6}\right)^2$ ، نستخدم توزيع PERT–BETA .

في سنة 1959 قام منشئوا طريقة بيرت بالاستعانة بتوزيع بيتا لإيجاد الزمن المتوقع والتباين لإنجاز الأنشطة ، وذلك بإجراء تحويل لتوزيع بيتا العادي الى توزيع معياري، نذكر أهم الخطوات فيما يلي:

خامسا: توزيع بيتا

_يعتمد توزيع بيتا على دالة بيتا التي تعرف كما يلي:

$$B(\alpha,\beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx$$

أولا نقوم بإثبات العلاقة بين دالة بيتا ودالة غاما[1] وفق المبرهنة الأتية :

[1] - دالتي غاما و بيتا تعتبران من الدوال الخاصة في الرياضيات، لهما تطبيقات كبيرة في أغلب فروع الرياضيات، أبتكرهما الرياضياتي السويسري أولير Euler .

مبرهنة:

ليكن α و β عددين حقيقين موجبين فأن :

$B(\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$ حيث $\Gamma(\alpha)=\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx$ هي عبارة عن دالة غاما .

أ- مفهوم توزيع بيتا

يعد هذا التوزيع من التوزيعات الاحتمالية المهمة وله من التطبيقات الكثيرة فهو يستخدم بشكل واسع في دراسة الأرصاد الجوية المتعلقة بنسب الرطوبة، الحرارة... وبافتراض أن لدينا متغير عشوائي مستمر وليكن X ، يتوزع وفق توزيع بيتا، فإن دالة التوزيع الاحتمالي له تأخذ الشكل التالي:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}x^{\alpha-1}\left(1-x\right)^{\beta-1} & , \ 0<x<1\\ 0/w\end{cases}$$

مع العلم أن

$\alpha,\beta>0$

حيث أن α و β تمثل معلمات هذا التوزيع.

ب- توقع وتباين توزيع بيتا

مبرهنة :

اذا كان X متغيرا عشوائيا له قانون بيتا فأن :

$$\mu = E(X) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \quad \text{...(1)}$$

$$\sigma^2 = V(X) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)} \quad \text{..........................(2)}$$

نضع التحويل التالي: $x = \frac{b-y}{b-a}$ فأن $\begin{cases} x=0 \Rightarrow y=a \\ x=1 \Rightarrow y=b \end{cases}$; $dx = \frac{dy}{b-a}$

فتصبح دالة الكثافة الاحتمالية (PERT) كالتالي:

$$f(y) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \cdot \frac{(y-a)^{\alpha-1}(b-y)^{\beta-1}}{(b-a)^{\alpha+\beta-1}} & ; a < y < b \\ 0/w \end{cases}$$

مع العلم أن $\alpha, \beta > 0$

لإيجاد توقع وتباين هذا التوزيع (PERT) نستعين بصيغ توقع وتباين توزيع بيتا المذكورين أعلاه ، وباستخدام طرق تقريبية بتعويض قيمتي a و b نحصل على الزمن المتوقع لإنجاز الأنشطة $t_e = \frac{a+4m+b}{6}$ ، و كذلك التباين $\sigma_t^2 = \left(\frac{b-a}{6}\right)^2$.

5-5- الاختلاف بين طريقتي CPM وPERT:

أهم الاختلافات بين PERT و CPM موضحة في الجدول أدناه:

طريقة PERT	طريقة CPM
هي تقنية إدارة المشروع التي تستخدم لإدارة الأنشطة غير المؤكدة (أي أن الزمن غير معلوم) لأي مشروع.	هي تقنية إدارة المشروع التي تستخدم لإدارة أنشطة معينة فقط (أي أن الزمن معلوم) لأي مشروع.
هي تقنية موجهة نحو الحدث مما يعني أن الشبكة مبنية على أساس الحدث.	هي تقنية موجهة نحو النشاط مما يعني أن الشبكة مبنية على أساس الأنشطة.
هي نموذج احتمالي.	هي نموذج حتمي
تركز بشكل كبير على الوقت حيث أن تحقيق الهدف الزمني أو تقدير النسبة المئوية للإنجاز أكثر أهمية.	تركز بشكل كبير على مفاضلة التكلفة الزمنية حيث أن تقليل التكلفة أكثر أهمية.
طريقة مناسبة لتقدير الوقت بدقة عالية.	طريقة مناسبة لتقدير الوقت المعقول.
لا يمكن تطبيق طريقة تقليص مدة تنفيذ المشروع (crashing).	يمكن تطبيق طريقة تقليص مدة تنفيذ المشروع .

تطبيق4:

الجدول التالي يوضح لنا مجموعة من الأنشطة التي يتكون منها مشروع انجاز محطة تزويد بالخدمات ، بالإضافة إلى المدة اللازمة لإنجاز كل نشاط بالأيام.

المطلوب: حدد ما يلي :

1- المسار الحرج باستخدام طريقة بيرت.

2- حساب التباين والانحراف المعياري لكل نشاط.

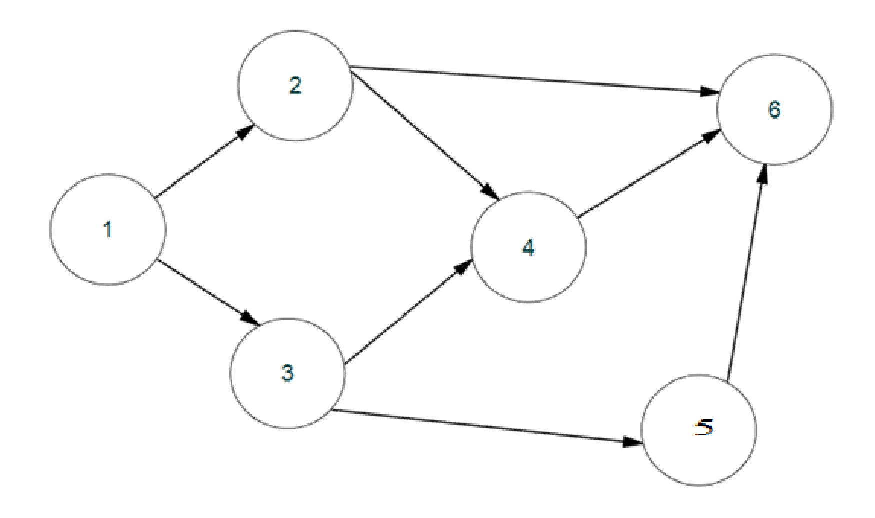
4- حساب احتمال إتمام المشروع في 50 يوما أو أقل ؟

النشاط	Ta	Tm	Tb
1--2	12	18	24
1--3	6	8	22
2--4	4	10	28
3--4	8	12	16
3--5	2	3	10
2--6	10	12	14
4--6	14	16	30
5--6	2	4	9

b: الوقت المتشائم ، m : الوقت الأكثر احتمالا ، a : الوقت المتفائل.

حل تطبيق 4:

أولاً نرسم مخطط الشبكة لبيانات الجدول و الموضح أدناه:



هنا زمن انجاز الأنشطة احتمالي ، لذلك نستخدم قيم زمنية معينة ، لإيجاد الزمن المتوقع لإنجاز الأنشطة و كذلك التباين نستخدم الصيغ التالية:

$$t_e = \frac{a+4m+b}{6}$$

$$\sigma_t^2 = \left(\frac{b-a}{6}\right)^2$$

سنحسب الوقت المتوقع لكل نشاط معين على النحو التالي:

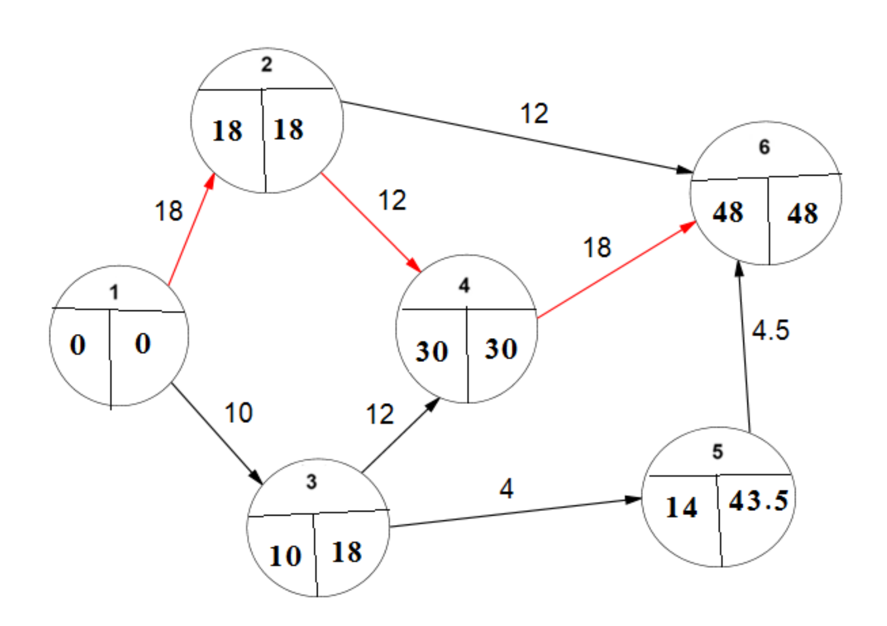
النشاط	t_a	t_m	t_b	الزمن المتوقع	التباين
1--2	12	18	24	18	4
1--3	6	8	22	10	7,11
2--4	4	10	28	12	16
3--4	8	12	16	12	1,78
3--5	2	3	10	4	1,78
2--6	10	12	14	12	0,44
4--6	14	16	30	18	7,11
5--6	2	4	9	4,5	1,36

بعد حساب المدة المتوقعة لتنفيذ المشروع نشرع بحساب الأزمة المبكرة والمتأخرة لكل نشاط لمعرفة المسار الحرج للمشروع كما هو موضح أدناه:

النشاط	الزمن المتوقع	ES	EF	LS	LF	الزمن الفائض
1--2	18	0	18	0	18	0
1--3	10	0	10	8	18	8
2--4	12	18	30	18	30	0
3--4	12	10	22	18	30	8

3--5	4	10	14	39.5	43.5	29.5
2--6	12	18	30	36	48	18
4--6	18	30	48	30	48	0
5--6	4,5	14	18.5	43.5	48	29.5

هنا يكون المسار الحرج على طول الأنشطة 1−2، 2−4، 4−6. إذن المسار الحرج هو 1−2−4−6. تم إعداد الرسم البياني التالي لإظهار المسار الحرج جنبًا إلى جنب مع ES و LF.



∴ المسار الحرج = 1−2−4−6 ، يتم الأن حساب الانحراف المعياري لأنشطة المسار الحرج فنحصل على: $\sigma = \sqrt{V_1 + V_2 + V_3} = \sqrt{4 + 16 + 0.44} = 4.52$

الآن يمكن حساب احتمال اتمام المشروع في ذلك الوقت المحدد (t) في 50 يوما أو أقل، باستخدام الصيغة أدناه

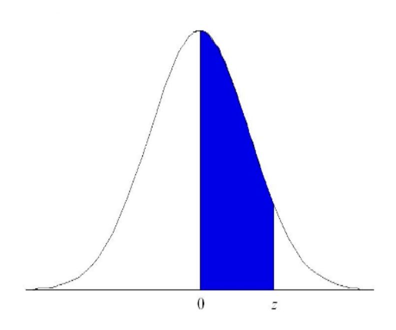
$$P(t \le 50) = P\left(\frac{t-\mu}{\sigma} \le \frac{50-48}{4.52}\right)$$
$$= P(Z \le 0.44) = 0.5 + \phi(0.44)$$
$$= 0.5 + 0.17 = 0.67$$

لمعرفة الاحتمال، علينا استخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري (جدول التوزيع الطبيعي)، حيث نجد قيمة الاحتمال هي 0.67 .

لتحويل هذه القيمة بالنسبة المئوية، علينا ضربها في 100، ومن هنا نحصل على:

احتمال انجاز المشروع في أو قبل 50 يوما أو أقل هو 67٪

جدول التوزيع الطبيعي



z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0160	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
0.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0753
0.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
0.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
0.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
0.6	.2257	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2517	.2549
0.7	.2580	.2611	.2642	.2673	.2704	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
0.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2995	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
0.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4761	.4767
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4864	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	.4964
2.7	.4965	.4966	.4967	.4968	.4969	.4970	.4971	.4972	.4973	.4974
2.8	.4974	.4975	.4976	.4977	.4977	.4978	.4979	.4979	.4980	.4981
2.9	.4981	.4982	.4982	.4983	.4984	.4984	.4985	.4985	.4986	.4986
3.0	.4987	.4987	.4987	.4988	.4988	.4989	.4989	.4989	.4990	.4990
3.1	.4990	.4991	.4991	.4991	.4992	.4992	.4992	.4992	.4993	.4993
3.2	.4993	.4993	.4994	.4994	.4994	.4994	.4994	.4995	.4995	.4995
3.3	.4995	.4995	.4995	.4996	.4996	.4996	.4996	.4996	.4996	.4997
3.4	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4998
3.5	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998
3.6	.4998	.4998	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999
3.7	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999
3.8	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999
3.9	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000

تطبيق5:

شركة " س " المختصة بصناعة المكملات الغذائية تخطط لصنع مشروب صحي جديد، (المدة اللازمة لإنجاز كل نشاط مقدرة بالأيام)، تم تلخيص تفاصيل المشروع لتطوير هذا المنتج في الجدول أدناه:

اسم النشاط	رمز النشاط	النشاط السابق	Ta	Tm	Tb
تحليل السوق	A	-	20	25	90
تحديد حاجيات الزبائن	B	A	20	30	100
اقتراح مواصفات المنتج	C	A	30	35	70
تحليل التنافسية	D	A	80	100	240
المعاينة الاستطلاعية	E	B	50	60	190
تطوير المنتج	F	C	50	60	310
تحليل السوق المحتمل	G	D	20	40	180
دراسة تمايز المنتجات	H	D	20	30	100
تقدير التكلفة	I	E	10	20	30
اختبار المنتج و تحديد الموافقة	J	F,G	60	70	140
تسعير المنتج	K	H,J	12	20	28
طرح المنتج في السوق	L	I,K	30	50	130

b: الوقت المتشائم ، m : الوقت الأكثر احتمالا ، a : الوقت المتفائل.

المطلوب : من خلال الجدول أعلاه حدد ما يلي:

1- المدة والتباين المتوقعان لكل نشاط؛

2-رسم شبكة الأعمال بطريقة بيرت؛

3- المسار الحرج والزمن المتوقع لإنجاز المشروع؛

4- إيجاد احتمال انجاز المشروع في أو قبل 380 يوما .

حل تطبيق 5:

1- المدة والتباين المتوقعان لكل نشاط:

لإيجاد الزمن المتوقع لإنجاز الأنشطة و كذلك التباين نستخدم الصيغ التالية:

$$t_e = \frac{a+4m+b}{6}$$

$$\sigma_t^2 = \left(\frac{b-a}{6}\right)^2$$

نتحصل على الجدول التالي:

النشاط	النشاط السابق	المدة ET المتوقعة	التباين
A	-	35	136,11
B	A	40	177,78
C	A	40	44,44
D	A	120	711,11
E	B	80	544,44
F	C	100	1877,77
G	D	60	711,11
H	D	40	177,78
I	E	20	11,11
J	F,G	80	177,78

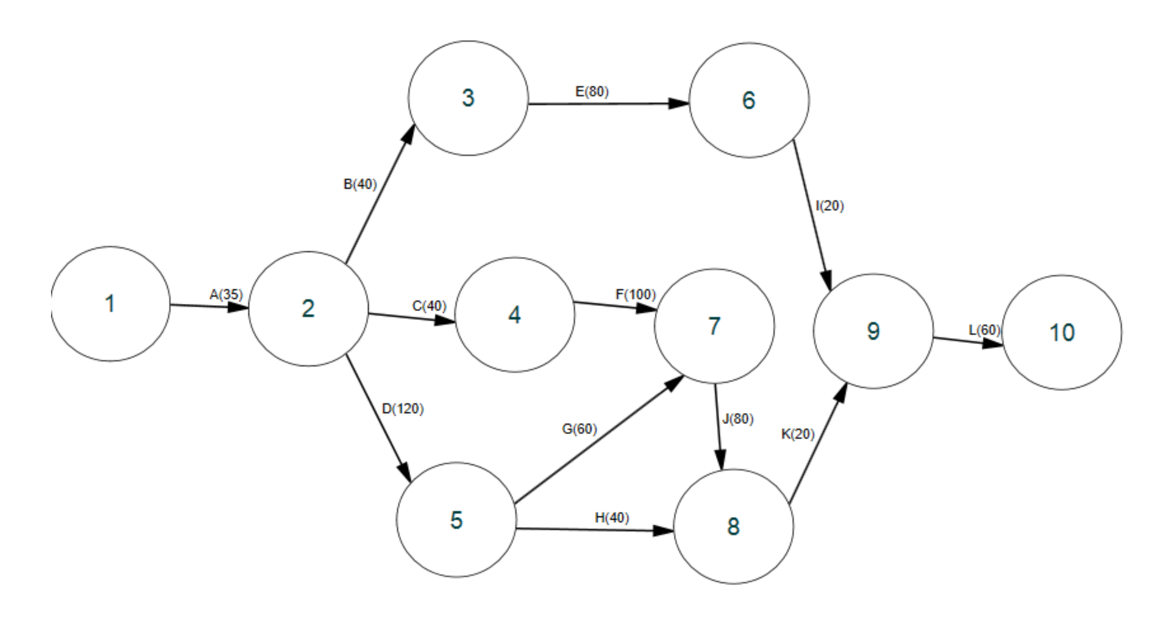
K	H,J	20	7,11
L	I,K	60	277,78

2- رسم شبكة الأعمال بطريقة بيرت:

أولا: نحدد النشاط اللاحق من النشاط السابق في الجدول التالي:

النشاط	النشاط السابق	النشاط اللاحق
A	-	BCD
B	A	E
C	A	F
D	A	G,H
E	B	I
F	C	J
G	D	J
H	D	K
I	E	L
J	F,G	K
K	H,J	L
L	I,K	-

ثانيا: نقوم برسم البداية والنهاية، حيث نحدد بعد البداية الأنشطة التي لم يسبقها أي نشاط (في مثالنا هذا نجد فقط النشاط A)، بالنسبة لرسم الأنشطة قبل النهاية تكون للأنشطة التي لا توجد لها لواحق (هنا نجد نشاط واحد وهو النشاط L)، باقي رسم الأنشطة يتم رسمها بنفس الكيفية.



3- المسار الحرج والزمن المتوقع لإنجاز المشروع:

نحتاج إلى الحسابات التالية:

زمن البدء المبكر EST:

سيكون زمن البدء المبكر للحدث الأول دائما 0.

بمساعدة صيغة معينة، يتم حساب زمن البدء المبكر على النحو التالي:

مثلا:

$$ES_6 = Max_3(35+40+80) = 175$$
$$ES_7 = Max_{4,5}\left[(75+100),(155+60)\right] = 215$$
$$ES_8 = Max_{5,7}\left[(215+80),(155+40)\right] = 295$$
$$ES_9 = Max_8(295+20) = 315$$

وهكذا بنفس الكيفية مع بقية الحسابات.

زمن الانجاز المتأخر LCT :

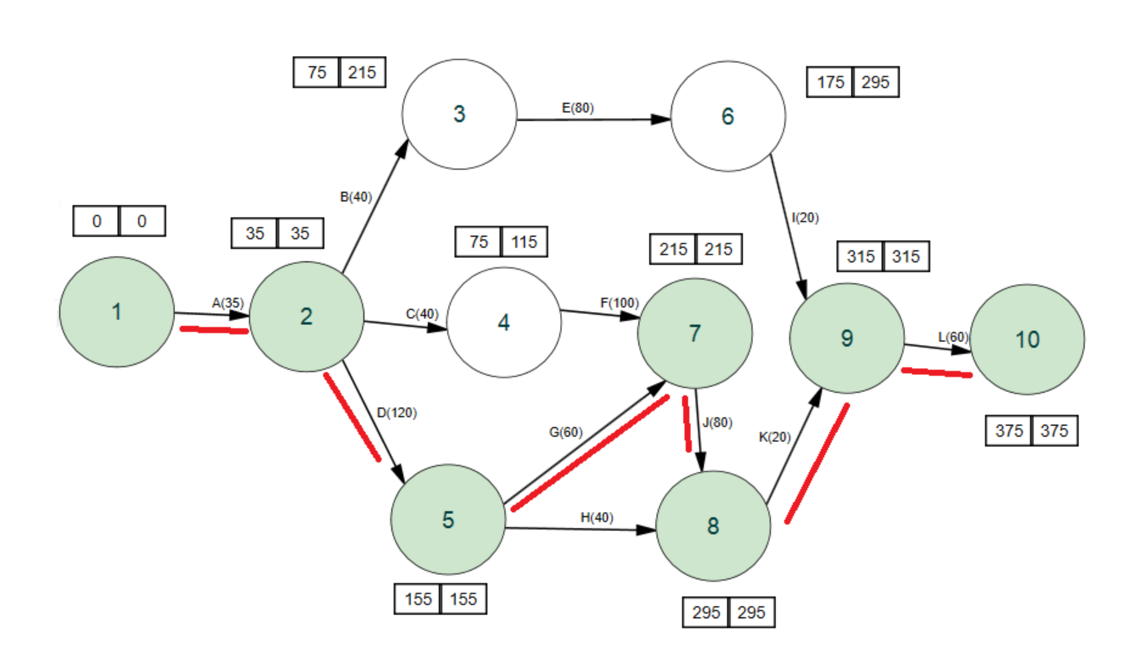
يعادل زمن الانجاز المتأخر للحدث 10 أبكر زمن بدء للحدث 10.

لنقوم بحساب LCi بمساعدة المعادلة المعطاة:

$$LC_3 = Min_6(295-80) = 215$$
$$LC_4 = Min_7(215-100) = 115$$
$$LC_5 = Min_{7,8}\left[(295-40),(215-60)\right] = 155$$

وهكذا بنفس الكيفية مع بقية الحسابات.

ونوضح ذلك في الرسم البياني التالي:



كما نعلم أن المسار الحرج هو أطول مسار في مخطط بيرت الذي يربط العقد التي تفي بجميع شروط هذه الطريقة، فهو المسار الذي يمر عبر كل تلك الأنشطة الأساسية التي يتم تنفيذها في تسلسل ويربط الحدث الأول بالحدث الأخير.

المسار الحرج هو:

$$1 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 8 \rightarrow 9 \rightarrow 10$$

والمدة المتوقعة لإنجاز هذا المشروع هي:

60+20+80+60+120+35 = 375 يوم.

4- إيجاد احتمال انجاز المشروع في أو قبل 380 يوما:

يتم الأن حساب الانحراف المعياري لأنشطة المسار الحرج فنحصل على:

$$\sigma = \sqrt{(V_A + V_D + V_G + V_J + V_K + V_L)}$$
$$\sigma = \sqrt{(136.11 + 711.11 + 711.11 + 177.78 + 7.11 + 277.78)} \approx 45$$

الآن يمكن حساب احتمال انجاز المشروع في ذلك الوقت المحدد (t)، في أو قبل 380 يوما ، باستخدام الصيغة أدناه

$$P(t \le 380) = P\left(\frac{t-\mu}{\sigma} \le \frac{380-375}{45}\right)$$
$$= P(Z \le 0.11) = 0.5 + \phi(0.11)$$
$$= 0.5 + 0.0438 = 0.5438$$

لمعرفة الاحتمال، علينا استخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري (**أنظر صفحة 251:**)، حيث نجد قيمة الاحتمال هي 0.5438 .

لتحويل هذه القيمة بالنسبة المئوية ، علينا ضربها في 100 ؛ ومن هنا نحصل على:

احتمال انجاز المشروع في أو قبل 380 يوما هو 54.38٪

5-6- تقليص زمن انجاز المشروع Project Crashing

في بعض الأحيان قد لا نجد وقتا كافيا أبدا في إدارة مشروع ما ، لهذا السبب نضع جداول كمحاولة للتحكم في الوقت ، تكفي فقط لتحقيق أهداف المشروع وذلك بالوفاء بالإنجاز بحلول الموعد النهائي، ومع ذلك فإن الأمور قد تنحرف عن مسارها و تعتبر التغييرات في المشروع شائعة بالطبع ، ولكن تقع على عاتق مدير المشروع مسؤولية التأكد من أن هذه التغييرات لا تنتج تأثيرا سلبيا على الجدول الزمني للمشروع.

هناك العديد من الطرق لتعديل الأشياء في المشروع قصد تسريعه، يتضمن ذلك إضافة موارد إضافية، وهذه طريقة تسمى تقليص مدة المشروع.

يحدث تقليص مدة المشروع عندما نريد تسريع المشروع ، وذلك عن طريق تقليل زمن نشاط واحد أو أكثر، و يتم إجراء التقليص عن طريق زيادة الموارد للمشروع ، مما يساعد على جعل الأنشطة تستغرق وقتا أقل مما تم التخطيط لها، وهذا بالطبع يضيف أيضا زيادة تكلفة المشروع الإجمالية، لذلك فإن الهدف الأساسي من تقليص زمن انجاز المشروع هو تقصير المدة مع الحفاظ على التكاليف عند الحد الأدنى.

قبل ذلك وجب اعطاء مفهوم حول التكاليف ، بشكل عام تنقسم إلى قسمين:

التكاليف المباشرة: ترتبط هذه التكاليف ارتباطًا مباشرًا بنشاط أو منتج أو خدمة للمؤسسة، حساب هذه المصاريف بسيط، بحيث يمكن دمجها مباشرة في حساب التكلفة.

مثلا: **المواد الأولية (الخام).**

5-6-1- التكاليف غير المباشرة: لا تتعلق هذه التكاليف بنشاط أو منتج أو خدمة للمؤسسة، حساب هذه التكاليف ليس بالأمر السهل، إذ يتم دمج هذه فقط في حساب التكلفة بعد الحسابات لتحديد جزء من هذه المصاريف المتعلقة بالنشاط أو المنتج / الخدمة المعنية.

مثلا:

- إهتلاك المعدات المستخدمة في تصنيع جميع أنواع منتجات الشركة فالمشكل هو تحديد ما هو الجزء من مصاريف الصيانة و الإهتلاكات لهذه الآلة الذي يدخل ضمن تكاليف هذه المنتوجات كلّ على حدى؟
- إيجار، مصاريف الادارة ، تكلفة فاتورة الكهرباء والماء والهاتف التابعة للمؤسسة التي تصنع عدة منتجات ولها عدة وظائف.

التكاليف الاجمالية = التكاليف المباشرة + التكاليف غير المباشرة

5-6-2- مفاهيم أساسية حول تقليص زمن انجاز المشروع : تتلخص في النقاط التالية:

- تقليص زمن انجاز المشروع يعني عملية تسريع نشاط أو أنشطة متعددة لتقليص المدة الكلية للمشروع.

- عن طريق إضافة أشخاص أو معدات أو ساعات عمل إضافية، يمكن لمدير المشروع تقليص مدة النشاط.
- التعجيل يكون للأنشطة الحرجة أكثر من الأنشطة الأخرى، لأن الأنشطة غير الحرجة لها زمن إضافي تقليصها لا يعجل المشروع ككل.
- قد يلزم استكمال النشاط بحلول تاريخ محدد لأسباب تعاقدية.
- يمكن إنجاز بعض الأنشطة بزمن مثالي خلال فترة معينة من العام ، مما يشجع المديرين على تسريع الأنشطة السابقة.
- قد تكون تكلفة تعجيل النشاط الذي يقلص مدة المشروع أقل من تكلفة تشغيل المشروع في نفس الفترة.

عند تقليص نشاط ما، تزداد تكاليفه المباشرة بسبب تعجيل العمل بمعدل أسرع من المعدل الطبيعي ، ولكن قد يتم تبرير هذه الزيادات في التكاليف إذا انخفضت التكاليف غير المباشرة.

- بالرغم من وجود فائدة واضحة لتحسين مدة المشروع على أساس التكلفة ، فإن تقليص مدة انجاز المشروع ليس خطوة روتينية في تخطيط المشروع.
- لا يمكن ربط تكامل الجدولة وتقدير المعلومات بسهولة نظرا لأن وحدات النشاط ليست هي نفسها في كثير من الأحيان.
- هناك مخاوف حقيقية أخرى تتمثل في أنه عندما يتم تقليص مدة انجاز المشروع تنشأ مسارات حرجة متعددة.
- مع ظهور المزيد من المسارات الحرجة، هناك خطر أكبر يتمثل في تأخير زمن الإنجاز.

- عملية تحديد المدة المثلى لمشروع ما، هي خطوة مهمة في التخطيط المناسب.
- تحليل التكاليف بشكل صحيح ومن ثم تشغيل المشروع بالطريقة الأكثر فعالية من حيث التكلفة يمكن أن يوفر الوقت والمال المعتبرين.

5-6-3- خطوات تعجيل مدة انجاز المشروع: نلخصها فيما يلي:

1- رسم شبكة الأعمال وايجاد المسار الحرج بالزمن العادي (الطبيعي).
2- حساب مدة الانجاز بالزمن المعجل ، ثم ايجاد الفرق بين الزمن الحرج للمشروع للحالتين (الطبيعي/ المعجل)، بحيث يعتبر هذا الفرق أقصى ما يمكن تخفيضه من الزمن الكلي لإنجاز المشروع.
3- ايجاد ميل خط التكلفة والذي يحسب كما يلي:

$$\text{ميل خط التكلفة} = \frac{\text{التكلفة المعجلة} - \text{التكلفة العادية}}{\text{الزمن العادي} - \text{الزمن المعجل}} = \frac{C_c - N_c}{N_t - C_t} = \frac{\Delta C}{\Delta t}$$

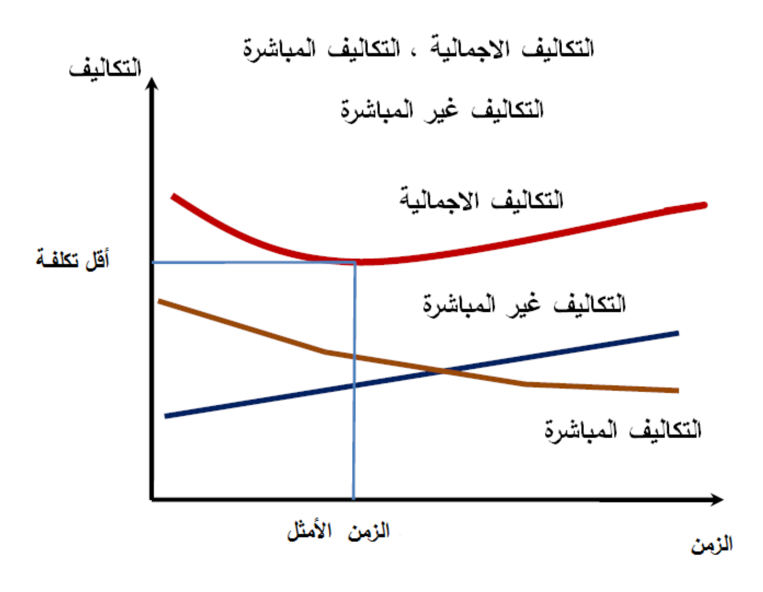
4- تحديد النشاط المرشح للتقليص (النشاط الحرج الذي يقابله أقل ميل).
5- من خلال تقليص زمن الأنشطة على المسار الحرج ، قد تصبح المسارات الأخرى أيضا حرجة و تسمى بالمسارات المتوازية ، في مثل هذه الحالة يمكن تقليل مدة انجاز المشروع عن طريق مقارنة تكلفة الأنشطة غير الحرجة مع النشاط الحرج المرشح للتقليص .
6- نبحث عن التكلفة الإجمالية للمشروع في كل خطوة.
7- نستمر في العملية حتى يتم تقليص مدة انجاز جميع الأنشطة ، ونقارن الزمن الجديد للتنفيذ مع الزمن الحرج للمشروع ، إذا كان مساويا له نتوقف ، وبخلافه نكرر نفس الخطوات إلى أن نصل إلى الزمن الأمثل.

8- في حالة التكلفة غير المباشرة، تتكرر عملية التقليص حتى تصل التكلفة الإجمالية إلى الحد الأدنى، هذا الحد الأدنى من التكلفة يسمى التكلفة المثلى للمشروع والزمن المقابل يسمى الزمن الأمثل.

ملاحظة :

- العلاقة بين زمن إتمام النشاط وتكاليفه المباشرة هي علاقة خطية عكسية، فكلما انخفض زمن إتمام النشاط ازدادت التكلفة المباشرة للنشاط بنفس النسبة والعكس صحيح.
- العلاقة بين زمن إتمام المشروع ككل وتكاليفه غير المباشرة هي علاقة طردية، حيث كلما انخفض زمن إتمام المشروع ككل انخفضت معه التكاليف غير المباشرة الخاصة بالمشروع والعكس صحيح.

نوضح تكاليف المشروع والزمن الأمثل في الشكل البياني التالي:



قبل أخذ مثال نعرج الى تعريف مصطلحات مهمة في عملية crashing وهي :

التعويم الحر Free Float : هو المدة التي يمكن أن يتأخر فيها النشاط دون تأخير زمن البدء المبكر (البداية المبكرة) ، أو بعبارة أخرى هو الفرق بين زمن البدء المبكر للنشاط الموالي مع زمن البدء المبكر للنشاط الحالي – مدة التنفيذ ، ونعبر عن ذلك بالمعادلة التالية: $FF_{ij} = ES_j - ES_i - D_{ij}$

حد الضغط :

حد (الضغط) compression limit هو الحد الذي يرشدنا إلى تحديد مقدار تقليص مدة انجاز المشروع.

تطبيق6:

الجدول التالي يوضح لنا مجموعة من الأنشطة التي يتكون منها مشروع انجاز مبنى معين، بالإضافة إلى المدة (بالأسابيع) و التكلفة (مقاسة بوحدة نقدية)(العادية والمعجلة).

التكلفة المباشرة (وحدة نقدية)		الزمن (بالأسابيع)		النشاط السابق	النشاط
المعجلة	العادية	المعجل	العادي		
1300	800	17	18	-	A
1960	1600	10	16	-	B
1400	1200	4	6	A	C
1200	1000	18	20	A	D
1900	1600	12	16	A	E
2000	1400	8	14	B ,C	F

G	D	10	9	1000	1250
H	E,F,G	12	11	1500	1800
				10100	

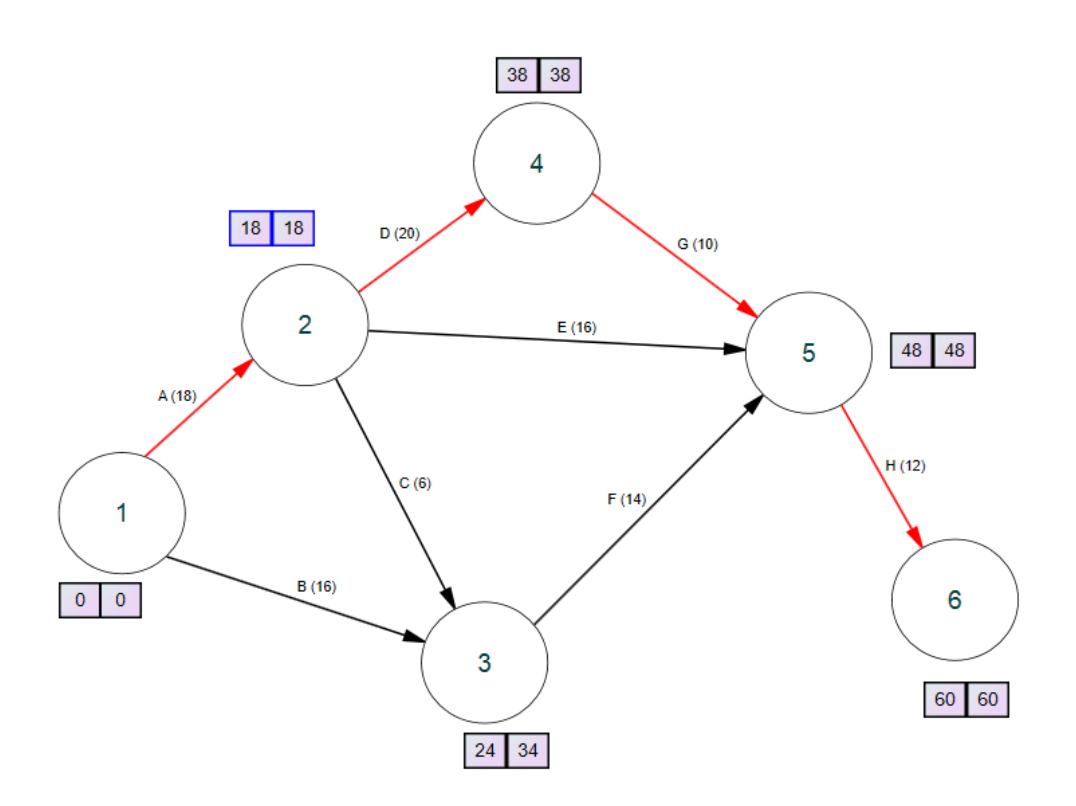
المطلوب :

1-رسم شبكة الأعمال وتحديد المسار الحرج.

2-أوجد الزمن الأمثل وأقل تكلفة إجمالية للمشروع علما أن التكلفة الثابتة = 200 وحدة نقدية في الأسبوع الواحد.

حل التطبيق6:

1-رسم شبكة الأعمال وتحديد المسار الحرج.



أما تحديد المسار الحرج فيكون كما يلي:

المسار الأول:1-2-4-5-6، أما زمنه فهو: 18+20+10+12 = 60 أسبوع.

المسار الثاني: 1-2-5-6، أما زمنه فهو: 18+16+12 = 50 أسبوع.

المسار الثالث: 1-2-3-5-6، أما زمنه فهو: 18+6+14+12 = 50 أسبوع.

المسار الرابع: أما زمنه فهو: **1-3-5-6**، أما زمنه فهو: 16+14+12 = 42 أسبوع.

المسار الحرج هو: 1-2-4-5-6 (A-D-G-H)، زمنه: **60 أسبوع**، أما الزمن الحرج باستخدام الزمن المعجل فيساوي: **55 أسبوع**.

2- إيجاد الزمن الأمثل وأقل تكلفة إجمالية للمشروع:

أولا: إيجاد التكلفة العادية للمشروع والتي تكون على النحو الاتي:

- **التكلفة المباشرة:** 10100 وحدة نقدية.
- **التكلفة غير المباشرة:** 200 × 60 = 12000 وحدة نقدية.
- **التكلفة الاجمالية:** 10100 + 12000 = 22100 وحدة نقدية.

ثانيا: اتمام الحسابات وفق الجدول التالي:

النشاط	الزمن (بالأسابيع)		التكلفة المباشرة (وحدة نقدية)		ΔC	Δt	$\frac{\Delta C}{\Delta t}$	تقليص الأسابيع		
	العادي	المعجل	العادية	المعجلة				خطوة1	خطوة 2	خطوة 3
A	18	17	800	1300	500	1	500			
B	16	10	1600	1960	360	6	60			
C	6	4	1200	1400	200	2	100			
D	20	18	1000	1200	200	2	100	1	1	
E	16	12	1600	1900	300	4	75			
F	14	8	1400	2000	600	6	100			
G	10	9	1000	1250	250	1	250			1
H	12	11	1500	1800	300	1	300			

مدة تنفيذ المشروع	60	59	58	57
زيادة التكلفة المباشرة		100	100	250
التكلفة المباشرة	10100	10200	10300	10550
التكلفة غير المباشرة	12000	11800	11600	11400
التكلفة الاجمالية	22100	22000	21900	21950

الفرق بين الزمن الحرج للمشروع للحالتين (الطبيعي/ المعجل) هو 60−55 = 5 أسابيع، وهذا أقصى ما يمكن تخفيضه من الزمن الكلي لإنجاز المشروع.

من خلال المسار الحرج ADGH ، نلاحظ أن أصغر ميل متعلق بالنشاط D (100) مع ($\Delta t = 2$) crash time ، معرفة حد الضغط compression limit الذي من خلاله يرشدنا إلى تحديد مقدار تقليص مدة انجاز المشروع أمر في غاية الأهمية ، نبدأ بتقليص أسبوع واحد (1) لتصبح مدة تنفيذ المشروع 59 أسبوع بالنسبة للخطوة الأولى ، دون أن ننسى تعديل التكلفة الاجمالية التي تصبح كما يلي:

$$C_{T_1} = 22100 + 100 - 200 = 22000 \text{ u.m}$$

نكرر نفس العملية بتحديد النشاط المرشح للتقليص (النشاط الحرج الذي يقابله أقل ميل)، في الخطوة الثانية مازال النشاط B هو المرشح للتقليص لكون ميله هو الأصغر لتصبح مدة تنفيذ المشروع 58 أسبوع بالنسبة للخطوة الثانية ، دون أن ننسى كذلك تعديل التكلفة الاجمالية التي تصبح كما يلي:

$$C_{T_2} = 22000 + 100 - 200 = 21900 \text{ u.m}$$

النشاط D لا يمكن تقليص مدته الأن لتساوي زمنه المعجل مع الزمن المقلص (18 أسبوع)، لذلك يخرج من حسابات التقليص في الخطوات القادمة.

نستمر بتكرار العملية ، نلاحظ أن أصغر ميل خاص بالنشاط G (250) وهو المرشح بتقليص مدته بأسبوع، لتصبح مدة تنفيذ المشروع 57 أسبوع هذا بالنسبة للخطوة الثالثة ، دون أن ننسى كذلك تعديل التكلفة الاجمالية التي تصبح كما يلي:

- $C_{T_3} = 21900 + 250 - 200 = 21950 \text{ u.m}$

هناك زيادة في التكاليف الاجمالية بعدما حققت انخفاضات في الخطوات الأولى والثانية، و بمقارنة $C_{T_1} = 22000 \text{ u.m}$, $C_{T_2} = 21900 \text{ u.m}$, $C_{T_3} = 21950 \text{ u.m}$ نستنتج أن أفضل تكلفة هي $C_{T_2} = 21900 \text{ u.m}$ ، بزمن قدره 58 أسبوع الذي نعتبره الزمن الأمثل و أفضل زمن يمكن تقليصه .

نلخص مدة تقليص المشروع في المسارات الأربع في الجدول الاتي:

مدة التنفيذ (بالأسبوع)	المسارات
58 ، 59 ، 60	6−**5**−**4**−**2**−1
50	6−5−2−1
50	6−5−3−2−1
42	6−5−3−1

تطبيق 7:

الجدول التالي يوضح لنا مجموعة من الأنشطة التي يتكون منها مشروع انجاز محطة بنزين، بالإضافة إلى المدة (بالأيام) و التكلفة (مقاسة بوحدة نقدية)(العادية والمعجلة).

النشاط	الزمن (بالأيام)		التكلفة المباشرة (وحدة نقدية)	
	العادي	المعجل	العادية	المعجلة
1-2	23	21	1280	1400
1-3	16	13	1000	1150
1-4	34	32	800	1100

2-4	10	8	400	520
3-4	20	18	300	360
4-5	2	1	200	250

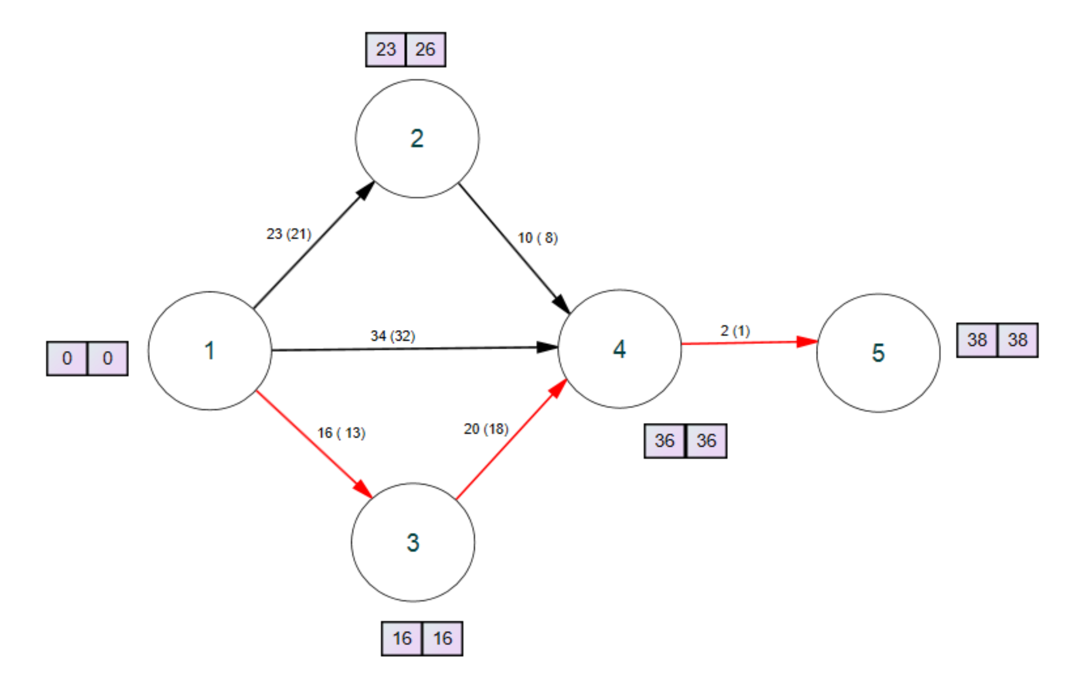
المطلوب :

1- رسم شبكة الأعمال وتحديد المسار الحرج.

2- أوجد الزمن الأمثل وأقل تكلفة إجمالية للمشروع علما أن التكلفة الثابتة = 60 وحدة نقدية في اليوم الواحد.

حل التطبيق7:

1- رسم شبكة الأعمال وتحديد المسار الحرج.



أما تحديد المسار الحرج فيكون كما يلي:

المسار الأول:1-2-4-5، أما زمنه فهو : 23+10+2 = 35 يوم.

المسار الثاني: 1-4-5، أما زمنه فهو : 34+2 = 36 يوم.

المسار الثالث: 1-3-4-5، أما زمنه فهو: 16+20+2 = 38 يوم.

المسار الحرج هو: **1-3-4-5** ، زمنه: **38 يوم**، أما الزمن الحرج باستخدام الزمن المعجل فيساوي: **32 يوم**.

2- إيجاد الزمن الأمثل وأقل تكلفة إجمالية للمشروع:

أولا: إيجاد التكلفة العادية للمشروع والتي تكون على النحو الاتي:

- **التكلفة المباشرة:** (1280+1000+800+400+300+200)= 3980 وحدة نقدية.
- **التكلفة غير المباشرة:** 60 × 38 = 2280 وحدة نقدية.
- **التكلفة الاجمالية:** 3980 + 2280 = 6260 وحدة نقدية.

ثانيا: اتمام الحسابات وفق الجدول التالي:

	الزمن (بالأيام)		التكلفة المباشرة (وحدة نقدية)		ΔC	Δt	$\frac{\Delta C}{\Delta t}$	تقليص الأيام			
النشاط	العادي	المعجل	العادية	المعجلة				خطوة 1	خطوة 2	خطوة 3	خطوة 4
1--2	23	21	1280	1400	120	2	60				
1--3	16	13	1000	1150	150	3	50			1	1
1--4	34	32	800	1100	300	2	150				1
2--4	10	8	400	520	120	2	60				
3--4	20	18	300	360	60	2	30	1	1		
4--5	2	1	200	250	50	1	50				

					مدة تنفيذ المشروع	38	37	36	35	34
					زيادة التكلفة المباشرة		30	30	50	200
					التكلفة المباشرة	3980	4010	4040	4090	4290
					التكلفة غير المباشرة	2280	2220	2160	2100	2040
					التكلفة الاجمالية	6260	6230	6200	6190	6330

الفرق بين الزمن الحرج للمشروع للحالتين (الطبيعي/ المعجل) هو 38−32 = 6 أيام، وهذا أقصى ما يمكن تخفيضه من الزمن الكلي لإنجاز المشروع.

من خلال المسار الحرج 1−3−4−5، نلاحظ أن أصغر ميل متعلق بالنشاط 4−3 (30) مع $(\Delta t = 2)$crash time ، معرفة حد الضغط compression limit الذي من خلاله يرشدنا إلى تحديد مقدار تقليص مدة انجاز المشروع أمر في غاية الأهمية ، نبدأ بتقليص يوم واحد (1) لتصبح مدة تنفيذ المشروع 37 يوم هذا بالنسبة للخطوة الأولى ، دون أن ننسى تعديل التكلفة الاجمالية التي تصبح كما يلي:

$$C_{T_1} = 6260 + 30 - 60 = 6230 \text{ u.m}$$

نكرر نفس العملية بتحديد النشاط المرشح للتقليص (النشاط الحرج الذي يقابله أقل ميل)، في الخطوة الثانية مازال النشاط (3−4) هو المرشح للتقليص لكون ميله هو الأصغر لتصبح مدة تنفيذ المشروع 36 يوم وهذا بالنسبة للخطوة الثانية ، دون أن ننسى كذلك تعديل التكلفة الاجمالية التي تصبح كما يلي:

$$C_{T_2} = 6230 + 30 - 60 = 6200 \text{ u.m}$$

النشاط (3−4) لا يمكن تقليص مدته الأن لتساوي زمنه المعجل مع الزمن المقلص (18 يوم)، لذلك يخرج من حسابات التقليص في الخطوة القادمة.

هناك مسارين حرجين في هذه الحالة (1−4−5) و (1−3−4−5) بزمن قدره 36 يوم.

(1−4) ، (4−5) و (1−3) ، (3−4) ، (4−5) ، نلاحظ أن النشاط (4−5) مشترك بين المسارين، لذا وجب حساب ميله على حدى، النشاط (3−4) مستبعد سابقا لنفس الأسباب ، نحسب مجموع الميلين بعد تشكيل توليفة الميلين، فيكون الحساب كما يلي:

ميل المسار (4−5) هو: 50 .

مجموع ميل المسارين: (1−4)، (1−3) هو: 150+50 = 200.

النشاط(4−5) هو المرشح للتقليص ، ميله هو 50 لتصبح مدة تنفيذ المشروع 35 يوم ، وهذا بالنسبة للخطوة الثالثة ، دون أن ننسى كذلك تعديل التكلفة الاجمالية التي تصبح كما يلي: $C_{T_3} = 6200 + 50 - 60 = 6190 \text{ u.m}$

النشاط (4−5) لا يمكن تقليص مدته الأن لتساوي زمنه المعجل مع الزمن المقلص (1 يوم)، لذلك يخرج من حسابات التقليص في الخطوة القادمة.

النشاطين (1−4) و (1−3) مرشحين للتقليص يوم لكل مسار، مجموع الميلين هما 200 لتصبح مدة تنفيذ المشروع 34 يوم ، وهذا بالنسبة للخطوة الرابعة ، دون أن

ننسى كذلك تعديل التكلفة الاجمالية التي تصبح كما يلي:

$C_{T_4} = 6190 + 200 - 60 = 6330$ u.m ،

هناك زيادة في التكاليف الاجمالية بعدما حققت انخفاضات في الخطوات الأولى والثانية والثالثة ، و بمقارنة

$C_{T_1} = 6230$ u.m , $C_{T_2} = 6200$ u.m , $C_{T_3} = 6190$ u.m , $C_{T_4} = 6330$ u.m نستنتج أن أفضل تكلفة هي $C_{T_3} = 6190$ u.m ، بزمن قدره 35 يوم الذي نعتبره الزمن الأمثل و أفضل زمن يمكن تقليصه .

نلخص مدة تقليص المشروع في المسارات الأربع في الجدول الاتي:

المسارات	مدة التنفيذ (بالأيام)
5−4−2−1	**35**
5−4−1	**35** ، **36**
5−4−3−1	**35** ، **36** ، **37** ، **38**

تطبيق 8:

الجدول التالي يوضح لنا مجموعة من الأنشطة التي يتكون منها مشروع انجاز مركب رياضي، بالإضافة إلى المدة (بالأيام) و التكلفة (مقاسة بوحدة نقدية)(العادية والمعجلة).

الأنشطة	الأنشطة السابقة	الزمن		التكلفة	
		العادي	المعجل	العادية	المعجلة
A	−	6	5	120	120
B	−	14	12	120	100

C	A	28	25	500	400
D	C	29	26	480	450
E	D	15	12	300	240
F	D	26	24	520	480
G	C	22	20	440	400
H	E,F,G	36	34	680	600
I	B	45	40	900	800
J	H,I	60	50	1200	1000

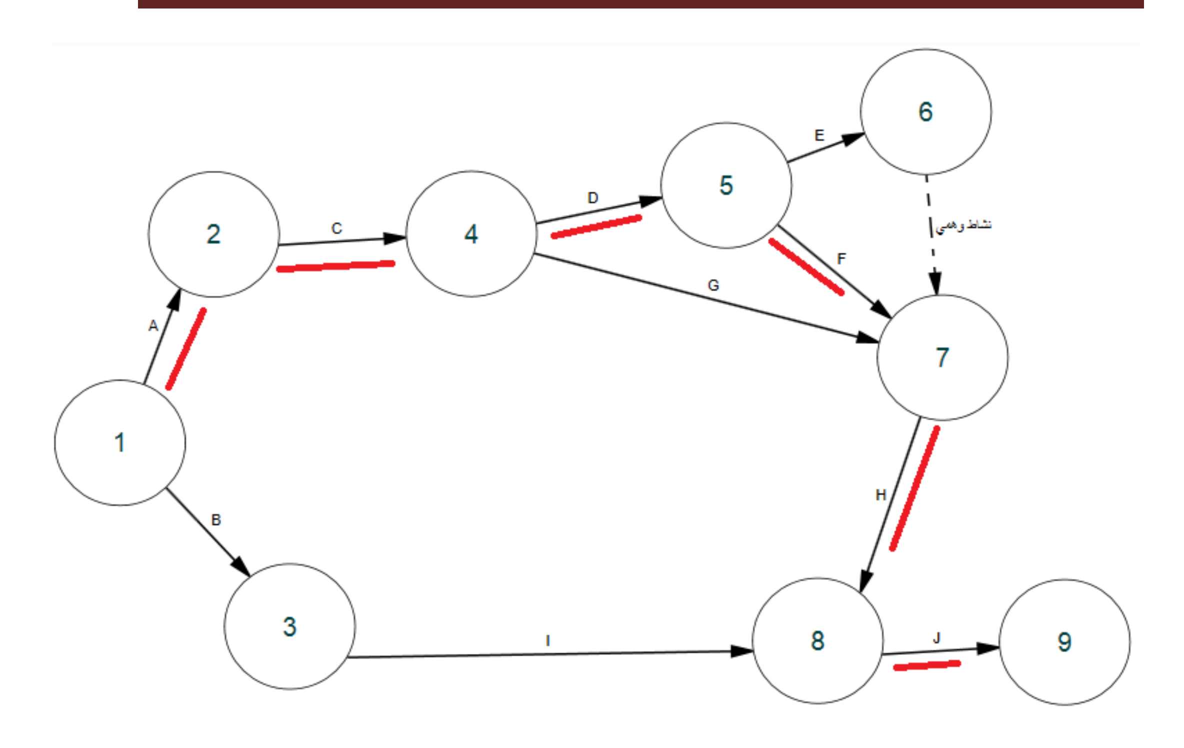
المطلوب :

3- رسم شبكة الأعمال وتحديد المسار الحرج.

4- أوجد الزمن الأمثل وأقل تكلفة إجمالية للمشروع علما أن التكلفة الثابتة = 21 وحدة نقدية في اليوم الواحد.

حل التطبيق8:

3- رسم شبكة الأعمال وتحديد المسار الحرج.



أما تحديد المسار الحرج فيكون كما يلي:

المسار الأول:ACDFHJ، أما زمنه فهو : 6+28+29+26+36+60 = 185 يوم.

المسار الثاني: ACDEE'HJ ، أما زمنه فهو : 6+28+29+15+36+60 = 174 يوم.

المسار الثالث: ACGHJ، أما زمنه فهو : 6+28+22+36+60 = 152 يوم.

المسار الرابع: BIJ، أما زمنه فهو : 14+45+60 = 119 يوم.

المسار الحرج هو: **ACDFHJ** ، زمنه: **185 يوم**، أما الزمن الحرج باستخدام الزمن المعجل فيساوي: **164 يوم**.

4- إيجاد الزمن الأمثل وأقل تكلفة إجمالية للمشروع:

أولا: إيجاد التكلفة العادية للمشروع والتي تكون على النحو الاتي:

- **التكلفة المباشرة:**

$$5260 = (1200+900+680+440+520+300+480+500+120+120)$$

وحدة نقدية.

- **التكلفة غير المباشرة:** $21 \times 185 = 3885$ وحدة نقدية.
- **التكلفة الاجمالية:** $5260 + 3885 = 9145$ وحدة نقدية.

ثانيا: اتمام الحسابات وفق الجدول التالي:

النشاط	الزمن (بالأسابيع)		التكلفة المباشرة (وحدة نقدية)		ΔC	Δt	$\frac{\Delta C}{\Delta t}$	تقليص الأيام			
	العادي	المعجل	العادية	المعجلة				خطوة 1	خطوة 2	خطوة 3	خطوة 4
A	6	5	120	120	0	1	0				
B	14	12	120	100	20	2	10				
C	28	25	500	400	100	3	33,33				1
D	29	26	480	450	30	3	10	3			
E	15	12	300	240	60	3	20				
F	26	24	520	480	40	2	20			2	
G	22	20	440	400	40	2	20				
H	36	34	680	600	80	2	40				

I	45	40	900	800	100	5	20				
J	60	50	1200	1000	200	10	20		10		

مدة تنفيذ المشروع	185	182	172	170	169
زيادة التكلفة المباشرة		30	200	40	33.33
التكلفة المباشرة	5260	5290	5490	5530	5563.33
التكلفة غير المباشرة	3885	3822	3612	3570	3549
التكلفة الاجمالية	9145	9112	9102	9100	9112.33

الفرق بين الزمن الحرج للمشروع للحالتين (الطبيعي/ المعجل) هو 185−164 = 21 يوم، وهذا أقصى ما يمكن تخفيضه من الزمن الكلي لإنجاز المشروع.

من خلال المسار الحرج **ACDFHJ** ، نلاحظ أن أصغر ميل متعلق بالنشاط **D** (10) مع crash time($\Delta t = 3$) ، معرفة حد الضغط compression limit الذي من خلاله يرشدنا إلى تحديد مقدار تقليص مدة انجاز المشروع أمر في غاية الأهمية ، بمأن مدة المسار الذي يلي المسار الحرج هي 174 يوم (فرق 11 يوم) بينه وبين مدة المسار الحرج (185 يوم) ، نقوم بطرح 3 أيام دفعة واحدة من زمن المسار الحرج لتصبح مدة التنفيذ الجديدة 182 يوم ، تعديل التكلفة الاجمالية التي تصبح كما يلي:

$$C_{T_1} = 9145 + 3(10) - 3(21) = 9112 \text{ u.m}$$

النشاط **(D)** لا يمكن تقليص مدته الأن لتساوي زمنه المعجل مع الزمن المقلص (26 يوم)، لذلك يخرج من حسابات التقليص في الخطوات القادمة.

النشاطين (F و J) مرشحين للتقليص ، ميلهما يساوي 20 ، نختار النشاط J ونرشحه للتقليص لمدة 10 أيام لنفس أسباب الخطوة السابقة (فرق 11 يوم بينه وبين مدة المسار الذي يليه) لتصبح مدة تنفيذ المشروع 172 يوم ، وهذا بالنسبة للخطوة الثانية ، دون أن ننسى كذلك تعديل التكلفة الاجمالية التي تصبح كما يلي:

$C_{T_2} = 9112 + 10(20) - 10(21) = 9102 \text{ u.m}$ ، النشاط **(J)** لا يمكن تقليص مدته الأن لتساوي زمنه المعجل مع الزمن المقلص (50 يوم)، لذلك يخرج من حسابات التقليص في الخطوات القادمة.

النشاط (F) مرشح للتقليص ، ميله يساوي 20 ونرشحه للتقليص بمدة يومين لتصبح مدة تنفيذ المشروع 170 يوم ، وهذا بالنسبة للخطوة الثالثة ، دون أن ننسى كذلك تعديل التكلفة الاجمالية التي تصبح كما يلي:

$$C_{T_3} = 9102 + 2(20) - 2(21) = 9100 \text{ u.m}$$

النشاط **(F)** لا يمكن تقليص مدته الأن لتساوي زمنه المعجل مع الزمن المقلص (24 يوم)، لذلك يخرج من حسابات التقليص في الخطوات القادمة.

النشاط (C) مرشح للتقليص ، ميله يساوي 33.33 ونرشحه للتقليص بزمن يوم واحد لتصبح مدة تنفيذ المشروع 169 يوم ، وهذا بالنسبة للخطوة الرابعة ، دون أن ننسى كذلك تعديل التكلفة الاجمالية التي تصبح كما يلي:

$$C_{T_4} = 9100 + 33.33 - 21 = 9112.33 \text{ u.m}$$

هناك زيادة في التكاليف الاجمالية بعدما حققت انخفاضات في الخطوات الأولى والثانية والثالثة ، و بمقارنة

$C_{T_1} = 9112$ u.m , $C_{T_2} = 9102$ u.m , $C_{T_3} = 9100$ u.m , $C_{T_4} = 9112.33$ u.m نستنتج

أن أفضل تكلفة هي $C_{T_3} = 9100$ u.m ، بزمن قدره 170 يوم الذي نعتبره الزمن الأمثل و أفضل زمن يمكن تقليصه .

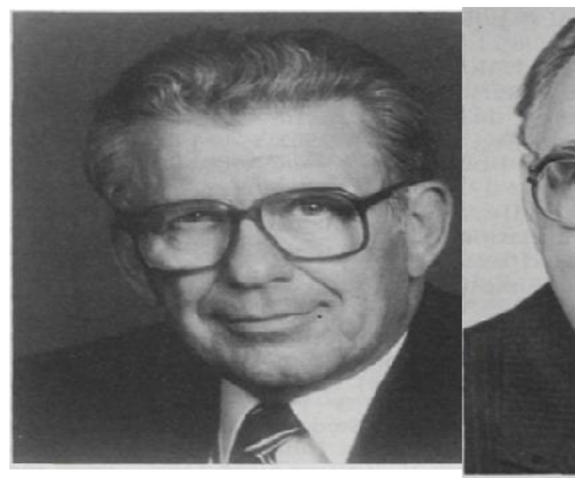
نلخص مدة تقليص المشروع في المسارات الأربع في الجدول الاتي:

المسارات	مدة التنفيذ (بالأيام)
ACDFHJ	185 ، 182 ، 172 ، 170
ACDEE'HJ	174 ، 171 ، 161
ACGHJ	152 ، 142
BIJ	119 ، 109

الأعلام المذكورة في الفصل الخامس



JAMES E. KELLEY جيمس كيلي





Morgan Walker مورجان ووكر

الفصل السادس : البرمجة الصحيحة Integer Programming

تمهيد:

كانت نماذج البرمجة الخطية التي تمت مناقشتها حتى الآن جميعها مستمرة، بمعنى أنه يسمح لمتغيرات القرار أن تكون ناطقة (كسرية)، غالبا ما يكون هذا افتراضا واقعيا، على سبيل المثال، قد نقوم بإنتاج سلعة قابلة للتجزئة مثل السكر أو الملح،...، وقد يكون الحل معقولا أيضا، وفي مرات أخرى تكون الحلول الجزئية غير واقعية ، مثلا لا يمكننا القول إنتاج حذاء ونصف ، لذا وجب علينا النظر في هذه الحالة بأخذ قيما صحيحة فقط.

تعريف:

مسألة أمثلة عدد صحيح هي أن يتم تقييد جميع المتغيرات بأخذ قيم صحيحة فقط.

مثال1:

- المتغيرات المنفصلة: عدد الأشياء التي يجب مراعاتها، عدد الإجراءات التي يتعين القيام بها وما إلى ذلك.
- عدد الدراجات (النارية / الهوائية) المنتجة.
- عدد العمال الذين سيتم تخصيصهم للورشة.
- المتغيرات الثنائية (0/1): نعم / لا ، تشغيل / إيقاف ،.... إلخ، حيث يشير(1) للمتغير الداخل في النموذج و (0) للمتغير غير الداخل في النموذج.

تعريف:

مسألة أمثلة عدد صحيح مختلط هي أن يتم تقييد بعض المتغيرات بأخذ قيم صحيحة فقط.

مثال2:

إمكانية التنقل:

- قرار ثنائي: شراء سيارة ثانية أم لا.
- قرار مستمر: عدد الكيلومترات المراد تغطيتها.

طاقة:

- قرار ثنائي: تركيب سخان مياه جديد يشتغل بـ: كهرباء / غاز.
- قرار مستمر: كمية الغاز المطلوب حرقها.

أما صياغة النموذج فتكون على النحو الاتي:

$$\underset{x\in\Re^n}{Max}\ Z = cx$$
$$S/C\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0\ ,\ x \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

أما الصيغة في حالة وجود متغير ثنائي:

$$\underset{x\in\Re^n}{Max}\ Z = cx$$
$$S/C\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0\ ,\ x \in \{0\ ,\ 1\} \end{cases}$$

هناك طريقتان لحل مسألة البرمجة الصحيحة وهي:

1-6 - طريقة المستوي القاطع لغوموري[1] Gomory Cutting Plane :

يتمثل مبدأ هذه الطريقة في إضافة قيود إلى البرنامج الخطي لتنقيحه وتقريبه من الحلول المتكاملة حيث كانت أولى الطرق لحل مسألة البرمجة الصحيحة ، فإذا كان الحل يفي بقيود الأعداد الصحيحة ، فسيتم إيجاد الحل الأمثل للمسألة الأصلية، خلاف ذلك في كل تكرار يتم إضافة قيود إضافية إلى المسألة الأصلية، حيث تتم إضافة هذه القيود لتقليل مساحة الحل أو قصها في كل تكرار متتالي ، مع استبعاد الحل الكسري الحالي و مع ضمان عدم استبعاد أي حل صحيح في العملية، تنتهي الطريقة بمجرد الحصول على قيمة عدد صحيح، وفي هذه الطريقة ، يتم ضمان التقارب في عدد محدود من التكرارات.

أما عن خطوات هذه الطريقة نلخصها فيما يلي:

- نستخدم طريقة simplex لإيجاد الحل الأمثل للمسألة المعطاة مع تجاهل شرط العدد الصحيح.
- نفحص الحل الأمثل، حيث نقوم بإنهاء التكرارات إذا كانت جميع المتغيرات الأساسية تحتوي على قيم أعداد صحيحة، خلافا لذلك نقوم بإنشاء قطع Gomory الكسري من الصف ، والذي يحتوي على أكبر جزء كسري ، ونضيفه إلى مجموعة القيود الأصلية.
- الأن نبحث عن حل البرمجة الخطية الجديدة ، إذا كان الحل الذي تم الحصول عليه على هذا النحو له قيما متكاملة ، فهذا هو الحل الأمثل المطلوب لـ I.L.P الأصلية ، خلاف ذلك نرجع إلى الخطوة السابقة.

---

[1] - **رالف إدوارد غوموري (1929-) Ralph Edward Gomory** رياضياتي أمريكي .

مثال3:

حل نموذج البرمجة الخطية التالي بطريقة المستوي القاطع لغوموري:

$$\begin{aligned} &Max\ Z\ =\ 4x_1+5x_2 \\ &3x_1+2x_2\le 17 \\ &x_1\le 4 \\ &x_1,x_2\ge 0\ ;\ x\in\mathbb{Z} \end{aligned}$$

حل المثال3:

أولا نقوم بتحويل الشكل القانوني إلى شكل معياري وذلك بإضافة متغيرات وهمية(مكملة) S_1 و S_2 ، فيكون النموذج كما يلي:

$$\begin{aligned} &Max\ Z\ =\ 4x_1+5x_2 \\ &3x_1+2x_2+S_1=17 \\ &x_1+S_2=4 \\ &x_1,x_2,S_1,S_2\ge 0\ ;\ x\in\mathbb{Z} \end{aligned}$$

الحل النهائي من جدول السمبلكس يكون على النحو الاتي:

CB	Cj	4	5	0	0	الحل
	BV	X1	X2	S1	S2	$b=x_B$
5	X2	3/2	1	1/2	0	**17/2**
0	S_2	1	0	0	1	**4**
	$Z_j=\sum CB_i a_{ij}$	**15/2**	**5**	**3**	**0**	**Z=85/2**
	Zj-Cj	7/2	0	5/2	0	

نلاحظ أن $Z_j - C_j \geq 0$ ، فأن هذا الجدول يمثل الحل النهائي:

$\left\{ x_2 = \frac{17}{2} \ , \ x_1 = 0 \ , \ Z = \frac{85}{2} \right\}$، لكن هذا الحل غير مقبول، إذ يجب أن تكون جميع متغيرات القرار الموجودة في الأساس ذات قيم صحيحة، لذا سنقوم بإنشاء قطع غوموري في كل مرحلة إلى أن نصل إلى عدد صحيح موجب.

لتطبيق طريقة غوموري نختار قيد خاص بمتغيرات القرار موجود في الأساس شرط أن يكون كسري، هنا لدينا متغير واحد (x2)، فالطريقة تتم على النحو الاتي:

$$\frac{3}{2}x_1 + x_2 + \frac{1}{2}S_1 = \frac{17}{2} ....(1)$$

نعرف الأن $[x]$ أكبر عدد صحيح وهو أصغر أو يساوي x ، مثلا: $[4.75] = 4$ ، $[-2.25] = -3$ ، يمكن كتابة أي عدد x بالشكل التالي $[x] + f$ حيث $0 \leq f < 1$ ، نسمي f : الجزء الكسري لـ x ، مثلا: $4.75 = 4 + 0.75$ ، $-2.25 = -3 + 0.75$ ، من الصيغة (1) نعيد كتابتها على النحو الاتي:

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right)x_1 + x_2 + \frac{1}{2}S_1 = \left(8 + \frac{1}{2}\right) ....(2).$$

نضع جميع الحدود ذات المعاملات الصحيحة على الطرف الأيسر، وجميع الحدود ذات المعاملات الكسرية في الطرف الأيمن لتصبح:

$$x_1 + x_2 - 8 = -\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}S_1 + \frac{1}{2} ....(3).$$

خوارزمية غوموري تنص على وضع الطرف الأيمن من الصيغة (3) على شكل قيد يضاف إلى المسألة الأصلية، أي من الشكل التالي:

$$-\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}S_1 + \frac{1}{2} \leq 0 ....(4).$$

بعد إضافة متغير وهمي (مكمل S_3) تصبح الصيغة (4) كما يلي:

$$-\frac{1}{2}x_1-\frac{1}{2}S_1+S_3=-\frac{1}{2}.................(5)$$

هذا القطع له خاصيتان وهما:

- أي نقطة مسموح بها في البرنامج الخطي تقبل القطع.
- عملية القطع تقطع الحل الأمثل الحالي للبرنامج الخطي المرخي [1](Relax) و نأمل من ذلك أن نحصل على حل، بحيث تكون جميع المتغيرات ذات قيم صحيحة، إذا كان الأمر كذلك فقد تحصلنا على الحل، وإذا كان خلاف هذا (أي أن الحل الجديد يحوي على متغيرات ذات قيم كسرية) فأننا نولد قطعا أخر بنفس الخطوات السابقة ونواصل المعالجة إلى ان نصل إلى الهدف المنشود (حلول ذات قيم صحيحة)، غوموري في سنة 1958 أثبت أن هذه العملية ستؤدي إلى حل أمثل لـ (IP) بعد عدد محدود من القطع.

بالرجوع إلى مثالنا نُنشأ الجدول التالي:

CB	Cj	4	5	0	0	0	الحل
	BV	X1	X2	S1	S2	S3	$b=x_B$
5	X2	3/2	1	1/2	0	0	17/2
0	S2	1	0	0	1	0	4
0	S3	-1/2	0	-1/2	0	1	-1/2
	$Z_j=\sum CB_i a_{ij}$	15/2	5	2.5	0	0	Z=85/2
	Zj-Cj	7/2	0		0		
$S_{i,j}<0$	$Ration=\frac{Z_j-C_J}{S_{i,j}}$	-7		-5			

[1] - الارخاء في الأمْثَلة هو تقريب مسألة صعبة من خلال مسألة قريبة ويسهل حلها، يوفر حل المسألة المرخية معلومات حول المسألة الأصلية.

أقل عدد سالب من عمود x_B هو : (-0.5).

أكبر عدد (سالب) من النسبة $Ration = \frac{Z_j - C_J}{S_{i,j}}$ هو (-5)، إذن المتغير الداخل هو S1 و المتغير الخارج هو S3 .

نتبع طريقة السمبلكس في حساب صف الارتكاز ، إذن المتغير الداخل هو S1 والمتغير الخارج هو S3 ، باقي الحساب نقدمه في الجدول التالي:

CB	Cj	4	5	0	0	0	الحل
	BV	X1	X2	S1	S2	S3	$b = x_B$
5	X2	1	1	0	0	1	8
0	S2	1	0	0	1	0	4
0	S1	1	0	1	0	-2	1
	$Z_j = \sum CB_i a_{ij}$	5	5	0	0	0	Z=40
	Zj-Cj	1	0	0	0	0	
$S_{i,j} < 0$	$Ration = \frac{Z_j - C_J}{S_{i,j}}$	-	-	-	-	-	

نلاحظ أن $Z_j - C_j \geq 0$ ، فأن هذا الجدول يمثل الحل النهائي الأمثل: $\{x_2 = 8 \ , \ x_1 = 0 \ , \ Z = 40\}$.

التطبيق على برنامج Maple :

في هذا المثال علينا أن نبرمج خوارزمية غوموري على برنامج المابل ، تم إقتباس الخوارزمية من موقع Discrete Optimization–II بعدها طبقنا عليها مثالنا .
(http://cgm.cs.mcgill.ca/~avis/courses/567/2010/assignments/ass2.html).

```
> %maple
                              ( ) maple
> # A hands on maple session to solve an ILP using Gomory's algorithm
> # max 4 x1 + 5 x2 s.t.  3x1 +2 x2 ≤ 17 ,  x1  ≤ 4
> # all variables integer and non-negative
>  with(simplex);
[basis, convexhull, cterm, define_zero, display, dual, feasible, maximize, minimize, pivot, pivoteqn, pivotvar, ratio, setup, standardize]
> # set up the linear program with slacks added
> # consts = constraints,  obj = objective function
> # dic = is a dictionary with both consts and obj
> consts := {x3 = 17 - 3· x1 − 2 x2 , x4 = 4 -x1 };
                    consts := {x3 = 17 − 3 x1 − 2 x2, x4 = 4 − x1}
> obj := {z = 4 * x1 +  5 * x2};
                              obj := {z = 4 x1 + 5 x2}
> dic := consts union obj;
              dic := {x3 = 17 − 3 x1 − 2 x2, x4 = 4 − x1, z = 4 x1 + 5 x2}
```

start one iteration of Gomory's algorithm

solve the LP

maximize(4 * x1 + 5 * x2, consts, NONNEGATIVE);

$$\left\{x1 = 0,\ x2 = \frac{17}{2},\ x3 = 0,\ x4 = 4\right\}$$

get the basis (non zero variables) and then get the optimum dictionary

solve(dic, {x2, x3, x4, z});

$$\{x2 = x2,\ x3 = 17 - 3\,x1 - 2\,x2,\ x4 = 4 - x1,\ z = 4\,x1 + 5\,x2\}$$

find a gomory cut from the equation in the dictionary for x2

update the consts and dic - x5 is the new slack variable

$$consts := consts\ \textbf{union}\ \left\{x5 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x1 + \frac{1}{2}x3\right\};$$

$$consts := \left\{x3 = 17 - 3\,x1 - 2\,x2,\ x4 = 4 - x1,\ x5 = -\frac{1}{2} + \frac{x1}{2} + \frac{x3}{2}\right\}$$

end one iteration of Gomory's algorithm

start next iteration

solve the LP

maximize(4 * x1 + 5 * x2, consts, NONNEGATIVE);

$$\{x1 = 0,\ x2 = 8,\ x3 = 1,\ x4 = 4,\ x5 = 0\}$$

6-2- طريقة الحد والفرع Branch and Bound Method :

تعد هذه الخوارزمية طريقة عامة لحل مسائل الأمْثَلة ، وبشكل أكثر تحديدا الأمْثَلة التوافقية أو المنفصلة، إنها طريقة تعداد ضمنية أي يمكن حصر جميع الحلول الممكنة للمسألة المعطاة ، لكن تحليل خصائص هذه المسألة يجعل من الممكن تجنب تعداد

فئات كبيرة من الحلول غير الممكنة، في هذه الخوارزمية يتم سرد فقط الحلول الجيدة المحتملة فقط.

تتم أحيانا مقارنة الفرع والحد بتقنية أخرى لإيجاد الحلول، وهي خوارزمية A^* ، وغالبا ما تستخدم في الذكاء الاصطناعي ، بينما يتم تخصيص الفرع والحد إلى حد ما لمسائل بحوث العمليات.

6-2-1- عرض الطريقة:

لنفترض أن S مجموعة محدودة ولكن من مجموعة أساسية " كبيرة " نسميها مجموعة (أو فضاء) من الحلول الممكنة، لتكن الدالة f والتي لأي حل ممكن x لـ S نسمي التكلفة $f(x)$ ، الهدف من المسألة هو إيجاد الحل المناسب x بأقل تكلفة، من وجهة نظر وجود الحل فإن المسألة تافهة، أي أن مثل هذا الحل x موجود لأن المجموعة S محدودة، من ناحية أخرى ، يواجه النهج الفعال للمسألة صعوبتين: الأول هو أنه لا توجد بالضرورة خوارزمية بسيطة لتعداد عناصر S، والثاني هو أن عدد الحلول الممكنة كبير جدا ، مما يعني أن وقت التعداد لجميع الحلول محظور (التعقيد الحسابي بشكل عام أسي) .

في طرق الحد والفرع، يوفر الفرع طريقة عامة لتعداد جميع الحلول بينما يتجنب الحد التعداد النظامي لجميع الحلول.

6-2-1-1- الفرع:

تتكون مرحلة الفرع من تقسيم المسألة إلى عدد من المسائل الفرعية التي يكون لكل منها مجموعة الحلول الممكنة بحيث تشكل كل هذه المجموعات تداخلا (تقسيما مثاليا) للمجموعة S، وهكذا عن طريق حل جميع المسائل الفرعية و من خلال اتخاذ أفضل حل يتم العثور عليه ، يمكن تطبيق مبدأ الفرع هذا بشكل متكرر على كل مجموعة فرعية من الحلول التي تم الحصول عليها ، وهذا طالما أن هناك مجموعات تحتوي على عدة مجموعات الحلول (والمسائل الفرعية المرتبطة بها) التي تم إنشاؤها بهذه الطريقة لها تسلسل هرمي طبيعي لشجرة القرار.

6-2-1-2- الحد:

يهدف تقييم عقدة شجرة البحث إلى تحديد أفضل مجموعة من الحلول الممكنة المرتبطة بالعقدة المعنية أو على عكس من ذلك، لإثبات أن هذه المجموعة لا تحتوي على حل مرجو للمسألة المعطاة (ممكن أنه لا يوجد حل أمثل)، عندما يتم تحديد مثل هذه العقدة في شجرة البحث فليس من الضروري القيام بفصل فضاء الحل الخاصة به.

في عقدة معينة، يمكن تحديد أفضل مسألة فرعية عندما تصبح المسألة الفرعية "بسيطة بدرجة كافية"، على سبيل المثال عندما تصبح مجموعة الحلول الممكنة أحادية العنصر (singleton)، تكون المسألة بسيطة بالفعل.

لتحديد أن مجموعة الحلول الممكنة لا تحتوي على حل أمثل، فإن الطريقة الأكثر شيوعا هي تحديد حد أدنى لتكلفة الحلول المضمنة في المجموعة (إذا كانت مسألة تدنية)، إذا تمكنا من العثور على حد أدنى لأفضل حل تم العثور عليه حتى الأن ، فإننا نؤكد أن المجموعة الفرعية لا تحتوي على المستوى الأمثل.

تعتمد أكثر الأساليب الكلاسيكية لحساب الحدود على فكرة تقليل قيود معينة: الاسترخاء المستمر ، واسترخاء لاغرانج ... إلخ.

6-2-2- خطوات طريقة الحد و الفرع :

بالنسبة لنموذج البرمجة الصحيحة (ILP)، نحصل على نموذج البرمجة الخطية بإزالة شرط أن جميع المتغيرات يجب أن تكون أعدادا صحيحة يسمى هذا اسرتخاء البرنامج الخطي (LP relaxation).

أما عن الخطوات فهي:

- نقسم المسألة إلى مسائل فرعية.
- حساب ارخاء البرنامج الخطي (LP) للمسألة الفرعية.
- مسألة البرنامج الخطي (LP) ليس لها حل ممكن.
- مسألة البرنامج الخطي (LP) لها حل أمثل لعدد صحيح ، نقارن الحل الأمثل مع أفضل حل تم العثور عليه.

– مسألة البرنامج الخطي (LP) لها حل أمثل أسوأ من الحل الحالي.
في جميع الحالات المذكورة أعلاه، نُعلم كل ما نحتاج إلى معرفته حول هذه المسألة الفرعية، حيث يتم فحصها.
– مسألة البرنامج الخطي (LP) لها حل أمثل لكن ليس عددا صحيحا أفضل من المسألة الحالية، في هذه الحالة يتعين علينا تقسيم هذه المسألة الفرعية بشكل أكبر وتكرارها.

مثال4:

حل نموذج البرمجة الخطية التالي بطريقة الحد والفرع:

$$\begin{aligned}
&Max\ Z\ =\ 6x_1 + 4x_2\\
&3x_1 + 2x_2 \le 30\\
&x_1 + x_2 \le 15\\
&x_1 \le 5\\
&x_1, x_2 \ge 0\ ;\ x \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

حل المثال4:

أولا : التحويل إلى البرنامج المرخي:

$$\begin{aligned}
&Max\ Z\ =\ 6x_1 + 4x_2\\
&3x_1 + 2x_2 \le 30\\
&x_1 + x_2 \le 15\\
&x_1 \le 5\\
&x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}$$

ثانيا نقوم بتحويل الشكل القانوني إلى شكل معياري وذلك بإضافة متغيرات وهمية(مكملة) S_1 و S_2 و S_3 ، فيكون النموذج كما يلي:

$$Max\ Z = 6x_1 + 4x_2$$
$$3x_1 + 2x_2 + S_1 = 30$$
$$x_1 + x_2 + S_2 = 15$$
$$x_1 + S_3 = 5$$
$$x_1, x_2, S_1, S_2, S_3 \geq 0$$

الحل النهائي من جدول السمبلكس يكون على النحو الاتي:

CB	Cj	6	4	0	0	0	الحل
	BV	X1	X2	S1	S2	S3	$b = x_B$
4	X2	0	1	1/2	0	-3/2	15/2
0	S2	0	0	-1/2	1	1/2	5/2
6	X1	1	0	0	0	1	5
	$Z_j = \sum CB_i a_{ij}$	6	4	2	0	0	Z=60
	Zj-Cj	0	0	2	0	0	

نلاحظ أن $Z_j - C_j \geq 0$ ، فأن هذا الجدول يمثل الحل النهائي:

$\left\{ x_2 = \frac{15}{2}\ ,\ x_1 = 5\ ,\ Z = 60 \right\}$، لكن هذا الحل غير مقبول، إذ يجب أن تكون جميع متغيرات القرار الموجودة في الأساس ذات قيم صحيحة، لذا سنقوم بتطبيق طريقة الحد والفرع إلى أن نصل إلى عدد صحيح موجب.

نلاحظ أن $8 > x_2 = \frac{15}{2} > 7$ ، ونظرا لأن x_2 يجب أن تكون قيمة صحيحة في الحل الأمثل ، يمكن إنشاء القيود التالية :

$x_2 \leq 7$, $x_2 \geq 8$ ، بمعنى آخر x_2 يمكن أن تكون:0،1،2،3،4،5،6،7، أو 8،9،10،.... ،....، ولكن لا يمكن أن تكون قيمة بين 7 و 8 ، مثل 7.5 ، يمثل هذان القيدان الجديدان مجموعتي الحل الفرعيين الخاص بمثالنا، ستتم إضافة كل من هذه القيود إلى نموذج البرمجة الخطي الخاص بنا ، والذي سيتم بعد ذلك حله بشكل

طبيعي بعد تحويله إلى البرنامج المرخي، يتم عرض تسلسل الأحداث هذا على الفرع والمخطط البياني في الشكل(6−4) و ستكون الحلول في العقدتين D و E هي الحلول المرخية التي تم الحصول عليها من خلال حل النموذج بعد إضافة القيود المناسبة.
لنشكل العقد ونتفحص الحلول:

العقدة A: الحل: $\left\{x_2 = \frac{15}{2}\ ,\ x_1 = 5\ ,\ Z_A = 60,\ Z_L = 58 : (x_1 = 5\ ,\ x_2 = 7)\right\}$.

العقدة B:

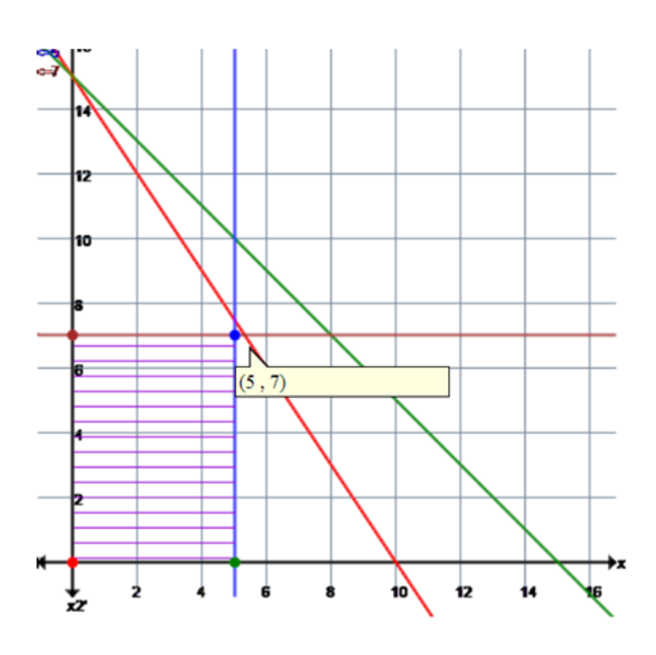
$$\begin{aligned} &Max\ Z\ =\ 6x_1 + 4x_2 \\ &3x_1 + 2x_2 \le 30 \\ &x_1 + x_2 \le 15 \\ &x_1 \le 5 \\ &x_2 \le 7 \\ &x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

العقدة B: الحل: $\{x_2 = 7\ ,\ x_1 = 5\ ,\ Z_B = 58,\ Z_L = 58 : (x_1 = 5\ ,\ x_2 = 7)\}$.

تم الحصول عليها بقيم الحل المقربة، هذه المسألة لها حل صحيح، لذلك لا حاجة لمزيد من التفريع.

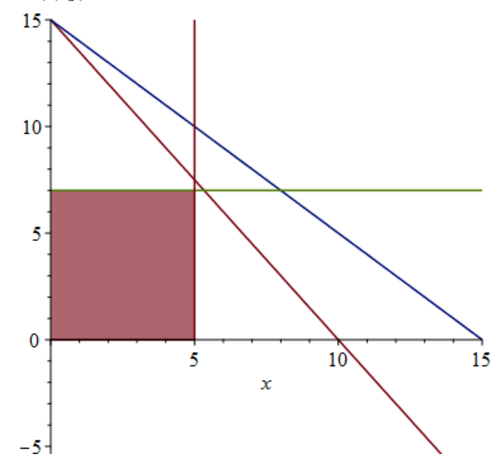
نوضح ذلك في الشكل التالي بتطبيق برمجية موقع Atozmath :

شكل (6−1)



أما التطبيق عبر برنامج Maple فكان كالتالي:

$$plots\text{:-}display\left(\left[plot\left(\left[15-\frac{3}{2}x,\ 15-x,\ 7\right], x=0..15\right), plot([5, x, x=0..15]),\ plottools\text{:-}transform((x,y) \rightarrow [x, y+7])(plot(-7, x=0..5,\ filled=true,))\right]\right)$$



العقدة C:

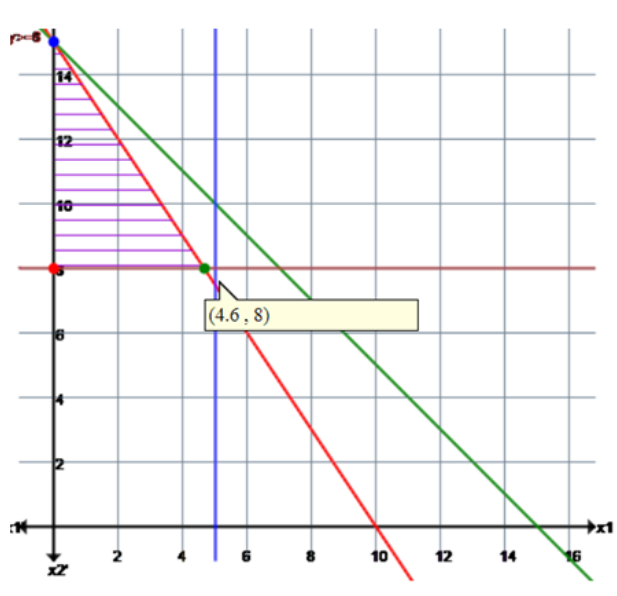
$$\begin{aligned} &Max\ Z = 6x_1 + 4x_2 \\ &3x_1 + 2x_2 \leq 30 \\ &x_1 + x_2 \leq 15 \\ &x_1 \leq 5 \\ &x_2 \geq 8 \\ &x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

العقدة C: الحل: $\left\{ x_2 = 8\ ,\ x_1 = \frac{14}{3},\ Z_C = 6 \times \frac{14}{3} + 4 \times 8 = 60 \right\}$.

$\left\{ x_2 = 8\ ,\ x_1 = 4\ ,\ Z_L = 56 \right\}$

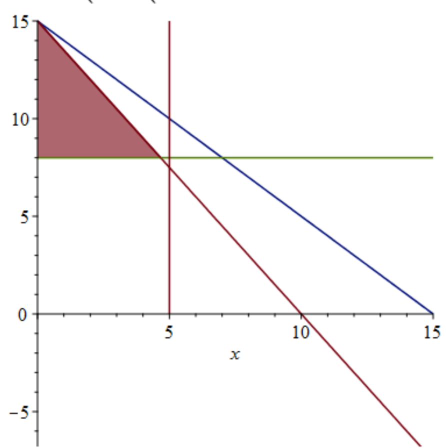
نوضح ذلك في الشكل التالي :

شكل (6−2)



أما التطبيق عبر برنامج Maple فكان كالتالي:

$$plots\text{:-}display\left(\left[plot\left(\left[15-\frac{3}{2}x\,,\,15-x\,,\,8\right],x=0..15\right),plot([5,x,x=0..15]),\right.\right.$$
$$\left.\left.plottools\text{:-}transform((x,y)\rightarrow[x,y+8])\left(plot\left(15-\frac{3}{2}x-8\,,x=0..\frac{14}{3},\,filled=true,\right)\right)\right]\right)$$



وبنفس منطق الخطوة السابقة نفرع العقدة C إلى عقدتين $\left(4<x_1=\dfrac{14}{3}<5\right)$، أي بإضافة قيدين: $x_1 \le 4 \;\;,\;\; x_1 \ge 5$.

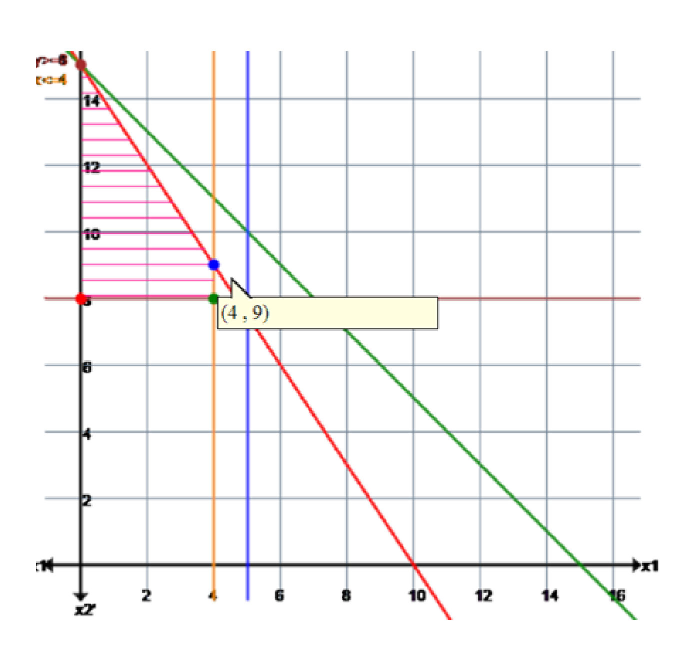
العقدة D:

$$\begin{aligned}
&Max\ Z \;=\; 6x_1+4x_2\\
&3x_1+2x_2 \le 30\\
&x_1+x_2 \le 15\\
&x_1 \le 5\\
&x_2 \ge 8\\
&x_1 \le 4\\
&x_1,x_2 \ge 0
\end{aligned}$$

العقدة D: الحل: $\begin{Bmatrix} x_2=9\;,\;x_1=4\\ Z_D=58\;,\;Z_L=60\end{Bmatrix}$، هذا الحل لا يحتاج إلى تفريع.

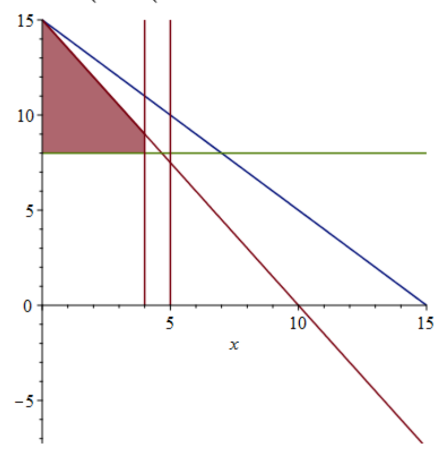
نوضح ذلك في الشكل التالي :

شكل (6-3)



أما التطبيق عبر برنامج Maple فكان كالتالي:

$$plots\text{:-}display\left(\left[plot\left(\left[15-\frac{3}{2}x,\ 15-x,\ 8\right],x=0..15\right), plot([5,x,x=0..15]), plot([4,x,x=0..15]),\right.\right.$$
$$\left.\left. plottools\text{:-}transform((x,y)\rightarrow[x,y+8])\left(plot\left(15-\frac{3}{2}x-8,\ x=0..4,\ filled=true,\right)\right)\right]\right)$$

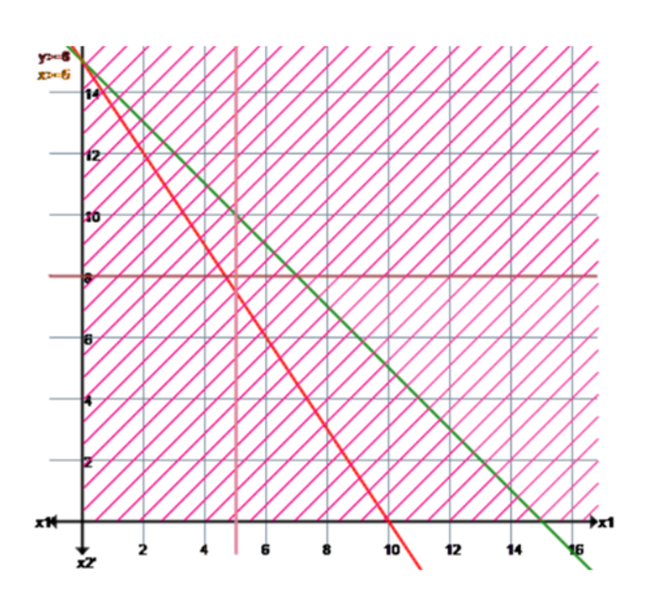


العقدة E:

$$\begin{aligned}
&Max\ Z = 6x_1 + 4x_2 \\
&3x_1 + 2x_2 \leq 30 \\
&x_1 + x_2 \leq 15 \\
&x_1 \leq 5 \\
&x_2 \geq 8 \\
&x_1 \geq 5 \\
&x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}$$

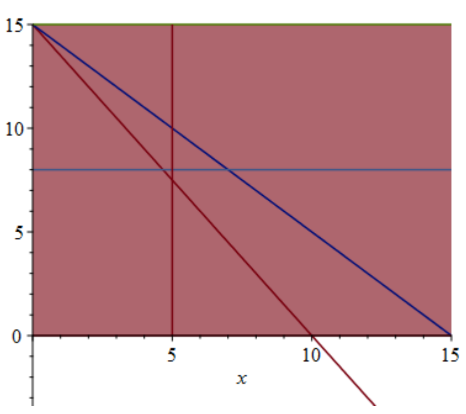
هذه المسألة ليس لها حل ممكن، لذلك يتم إنهاء هذا الفرع.

نوضح ذلك في الشكل التالي :



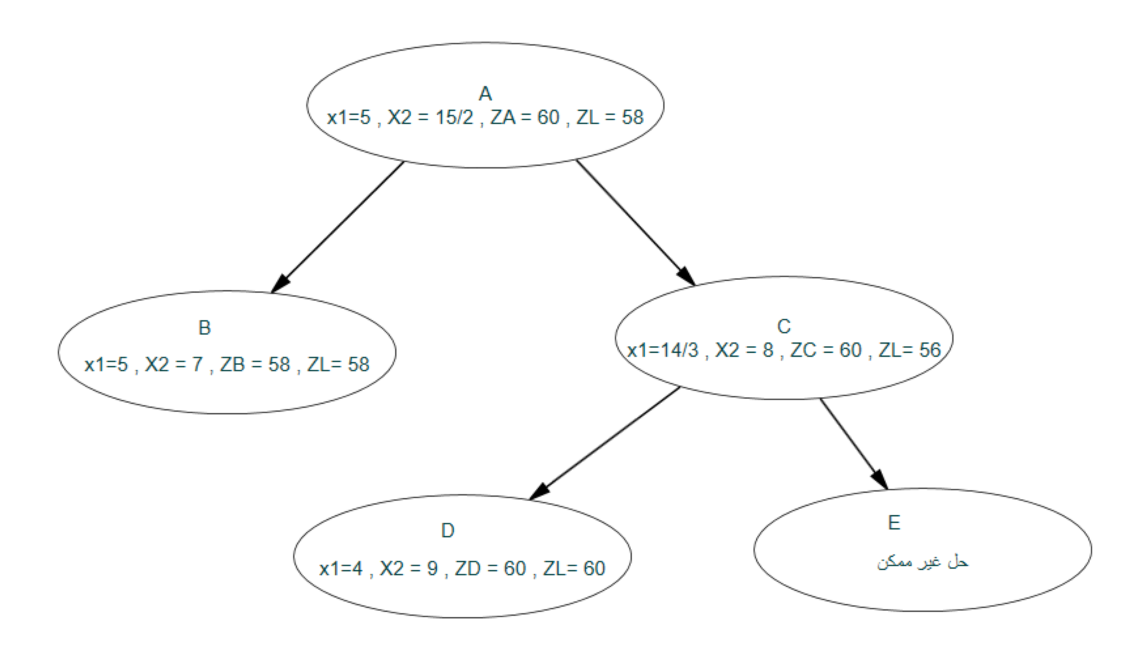
أما التطبيق عبر برنامج Maple فكان كالتالي:

$$plots\text{:-}display\left(\left[plot\left(\left[15-\frac{3}{2}x,\ 15-x,\ 15,\ 8\right], x=0..15\right), plot([5, x, x=0..15]),\right.\right.$$
$$\left.\left. plottools\text{:-}transform((x, y) \rightarrow [x, y+15])(\ plot(-15, x=0..15,\ filled=true,))\right]\right)$$



نلخص الخطوات السابقة في هذ الشكل التالي:

شكل (6−4)



6-2-3- نموذج البرمجة الخطية الصحيحة (الثنائية) Binary Integer Programming بطريقة الحد والفرع:

مثال5:

ترغب مؤسسة في استثمار مبلغ 16 مليار دينار جزائري ، ولقد تم تحديد أربع فرص استثمارية كانت موضحة من خلال تكلفة المشروع والعائد المتوقع.

الاستثمار الأول: يكلف 10 مليار دج و له عائد متوقع بـ 16 مليار دج.

الاستثمار الثاني: يكلف 6 مليار دج و له عائد متوقع بـ 22 مليار دج.

الاستثمار الثالث: يكلف 5 مليار دج و له عائد متوقع بـ 12 مليار دج.

الاستثمار الرابع: يكلف 4 مليار دج و له عائد متوقع بـ 8 مليار دج.

أي هذه المشاريع ستستثمر فيها المؤسسة من أجل تعظيم أرباحها.

كما هو الحال في البرمجة الخطية فأن خطواتنا الأولى هي تحديد المتغيرات الخاصة بنموذجنا ، قد يكون هذا أكثر صعوبة في برمجة الأعداد الصحيحة نظرا لوجود طرق ذكية جدا لاستخدام قيود التكامل، في هذه الحالة نستخدم البرمجة الثنائية (0-1)، ستكون الاجابة إما الموافقة على اختيار هذا المشروع أو رفضه، وبالتالي ستكون قيمة x_i كما يلي:

$$x_i = \begin{cases} 1 : & \text{إذا كانت الموافقة على اختيار المشروع} \\ 0 : & \text{غير ذلك} \end{cases}$$

البرمجة الصحيحة الثنائية تكون كالتالي:

$$Max\ Z = 16x_1 + 22x_2 + 12x_3 + 8x_4$$
$$S/C \begin{cases} 10x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 4x_4 \leq 16 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0,1\} \end{cases}$$

أولا : التحويل إلى البرنامج المرخي:

$$Max\ Z = 16x_1 + 22x_2 + 12x_3 + 8x_4$$
$$S/C \begin{cases} 10x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 4x_4 \leq 16 \\ x_i \leq 1 \ ; \ 1 \leq i \leq 4 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

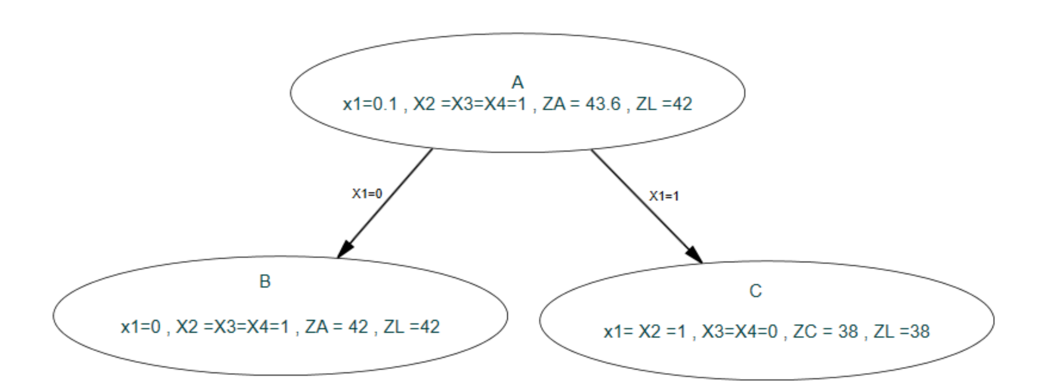
لدينا أربع متغيرات و خمسة قيود، بعد حل هذا البرنامج بطريقة السمبلكس العادية تحصلنا على الحل التالي: $(x_1 = 0.1 \ , x_2 = x_3 = x_4 = 1)$, $Z = 43.6$.

هذا حل غير متكامل نظرا لأنه عند تقريب أو تدوير قيمة x_1 إلى الصفر يعطي حلا بقيمة $Z_L = 42$ ، $(x_1 = 0 \ , x_2 = x_3 = x_4 = 1)$, $Z_L = 42$.

ومع ذلك فأن التقريب في بعض المرات لا يجدي نفعا لأنه قد توجد حلول أفضل من الحل الأصلي وبالتالي لا يعطي القيمة المثلى.

نظرا لأن x_1 ليس عددا صحيحا فليس لدينا حل صحيح، نريد أن يجبر x_1 على أن يكون عددا صحيحا، للقيام بذلك نفرع x_1 لننشأ مسألتين فرعيتين، سنضيف $x_1 = 0$ في قيد، وفي القيد الأخر نضيف $x_1 = 1$ وهذا موضح في الشكل التالي:

شكل (6-5)



نلاحظ أن أي حل أمثل للمسألة العامة يجب أن يكون ممكنا لإحدى المسائل الفرعية، إذا قمنا بحل المسائل الفرعية المرتخية فسنحصل على الحلول التالية:

العقدة B $(x_1=0)$:

$$Z_L=42\ ,\ Z_B=22\cdot 1+12\cdot 1+8\cdot 1=42\ ,\ \left(x_1=0\ \ ,x_2=x_3=x_4=1\right)$$

العقدة C $(x_1=1)$:

$$Z_L=42\ ,\ Z_C=16\cdot 1+22\cdot 1=38\ ,\ \left(x_1=1=\ x_2\ ,\ x_3=x_4=0\right)$$

وبالتالي الحل الأمثل يكون في اتخاذ قرار الاستثمار في المشروع الثاني والثالث والرابع.

مثال6:

مدينة كبيرة تتكون من خمس مقاطعات، قررت سلطات المدينة بناء محطات في بعض هذه المقاطعات، ووضعت شرط وهو أن مواطني جميع المقاطعات يمكنهم الوصول إلى أي محطة في مدة 20 دقيقة على الأكثر سيرا بسيارة لها سرعة 40 كلم/ساعة ، فإذا

كان هدف السلطات بناء أقل عدد من المحطات وبمساعدة جدول المسافات ، ماهي المقاطعات التي تستفيد من بناء محطة قطار.

	مدينة 1	مدينة 2	مدينة 3	مدينة 4	مدينة 5
مدينة 1	0	25	10	30	50
مدينة 2	25	0	35	25	10
مدينة 3	10	35	0	5	10
مدينة 4	30	25	5	0	35
مدينة 5	50	10	10	35	0

نعرف المتغير الثنائي لكل مقاطعةj ، $j=1,...,5$.

$$x_j = \begin{cases} 1: & \text{إذا تم بناء المحطة في المقاطعة} \\ 0: & \text{غير ذلك} \end{cases}$$

البرمجة الصحيحة الثنائية تكون كالتالي:

$$Min\ Z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$$

$$S/C \begin{cases} x_1 + x_3 \geq 1 \\ x_2 + x_5 \geq 1 \\ x_1 + x_3 + x_4 + x_5 \geq 1 \\ x_3 + x_4 \geq 1 \\ x_2 + x_3 + x_5 \geq 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in \{0,1\} \end{cases}$$

يشير كل قيد إلى مقاطعة، ويضمن أن محطة قطار واحدة على الأقل لن تقع على بعد أكثر من 20 دقيقة.

بعد حل البرنامج المرخي بواسطة برنامج Maple تحصلنا على النتائج التالية:

$$Z = 2 \ , \ \left(x_1 = x_4 = x_5 = 0 \ \ , x_2 = x_3 = 1\right)$$

وبالتالي فالقرار يتم بناء محطتين في المقاطعتين 2 و 3 .

الأعلام المذكورة في الفصل السادس:



رالف إدوارد غوموري

Ralph Edward Gomory

(-1929)

الفصل السابع : البرمجة غير الخطية Nonlinear programming

تمهيد:

تنقسم مسائل التحسين أو الأَمْثَلة عادة إلى قسمين رئيسيين: البرمجة الخطية وغير الخطية ، تتميز هذه الفئات بوجود أو عدم وجود دوال غير خطية في دالة الهدف أو القيود وتؤدي إلى طرق حل متميزة للغاية ، بعد تطرقنا للبرمجة الخطية في الفصل (2) سنتناول الطريقة الثانية (البرمجة غير الخطية) في هذا الفصل.

هناك عدة تطبيقات للبرمجة غير الخطية ومن أكثرها شيوعا التصميم الهندسي والتحكم وتجهيز البيانات والتخطيط الاقتصادي، تشترك هذه التطبيقات عادة في بعض السمات المتعلقة ببنية المسألة التي تجعل خوارزميات التحسين المحدبة فعالة للغاية، يمكن أن يكون فهم كل من هذه السمات وكيف ستفسر الخوارزميات بهذه المسألة بشكل مفيد في أداء مهام التحسين .

7-1- مدخل إلى الأَمْثَلة الكلاسيكية المطبقة:

الطرق الكلاسيكية للأَمْثَلة مفيدة في إيجاد الحل الأمثل للدوال المستمرة والقابلة للتفاضل، هذه الطرق تحليلية وتستفيد من تقنيات حساب التفاضل في تحديد النقاط المثلى، تشكل دراسة طرق حساب التفاضل والتكامل في الأَمْثَلة أساسا لتطوير معظم التقنيات العددية ، نبدأ بتقديم هذا الفصل حول الشروط الضرورية والكافية لتحديد الحل

الأمثل لدالة ذات متغير واحد ، ثم لدوال متعددة المتغيرات بدون قيود ومع قيود المساواة وعدم المساواة.

7-1-1- التقعر والتحدب للدوال ذات متغير حقيقي واحد Concave and convex functions of a single variable:

يقال أن الدالة محدبة عند $x=a$ إذا كان منحنى الدالة بالكامل فوق خط المماس، و يقال أن الدالة مقعرة عند $x=a$ إذا كان منحنى الدالة بالكامل أسفل خط المماس، فالمشتقة الثانية الموجبة عند $x=a$ توضح أن الدالة محدبة عند $x=a$ ، و المشتقة الثانية السالبة عند $x=a$ توضح أن الدالة مقعرة عند $x=a$.

ملاحظة:

إن إشارة المشتقة الأولى غير مناسبة لمعرفة التقعر والتحدب.

تعريف:

نقول عن الدالة f أنها محدبة / مقعرة على المجال $[a,b]$ عندما نثبت واحدة من الطرق الأتية:

أ) $f''(x)>0$ محدبة، $f''(x)<0$ مقعرة.

ب) تكون محدبة إذا كان:

$$\forall x_1, x_1 \in [a,b], \exists \lambda_1, \lambda_2 \geq 0;$$
$$\lambda_1 + \lambda_2 = 1 \quad ; \quad \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$$
$$f(x) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$$

أو : $f\left(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2\right) \leq \lambda_1 f\left(x_1\right)+\lambda_2 f\left(x_2\right)$

و تكون مقعرة إذا كان:

$$f\left(x\right) \geq \lambda_1 f\left(x_1\right)+\lambda_2 f\left(x_2\right)$$
$$f\left(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2\right) \geq \lambda_1 f\left(x_1\right)+\lambda_2 f\left(x_2\right)$$

3) تكون محدبة إذا كان:

$$f\left(x\right) \geq f'\left(x\right)\left(x-a\right)+f\left(a\right)$$

و تكون مقعرة إذا كان:

$$f\left(x\right) \leq f'\left(x\right)\left(x-a\right)+f\left(a\right)$$

مثال1:

لتكن الدالة f والمعرفة كما يلي:

$$f\left(x\right)=2\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)-\frac{1}{x}$$

1) أوجد مجموعة التعريف D_f ، وأحسب النهايات و المشتقة $f'(x)$ وقدم جدول التغيرات.

2) أدرس تحدب وتقعر الدالة.

3) بين أن المعادلة $f\left(x\right)=0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $(0 \ , \ 1)$.

حل المثال1:

(1

$$D_f = \left\{ x \in IR / \frac{1+x}{1-x} > 0 \;\; ; \;\; x \neq 0 \;\; ; \;\; x \neq 1 \right\} \; , \; D_f = (-1 \; , \; 0) \cup (0 \; , \; 1)$$

حساب النهايات:

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} \left(2\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \frac{1}{x} \right) = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \left(2\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \frac{1}{x} \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \left(2\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \frac{1}{x} \right) = -\infty$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \left(2\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \frac{1}{x} \right) = +\infty$$

حساب المشتقة f' :

الدالة f معرفة ومستمرة في كامل مجال تعريفها D_f ، إذن المشتقة هي كما يلي:

$$\forall x \in D_f : f'(x) = 2\frac{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)'}{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)} + \frac{1}{x^2} = \frac{3x^2+1}{x^2\left(1-x^2\right)} > 0$$

جدول تغيرات الدالة f :

x	-1		0	1
f'	$+$		$+$	
f	$-\infty$ ↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗ $+\infty$	

2) دراسة تحدب وتقعر الدالة f .

لإيجاد التحدب او التقعر نحتاج إلى حساب المشتقة من الرتبة الثانية:

$$\forall x \in D_f : f''(x) = \frac{6x^4 + 4x^2 - 2}{x^3 (1 - x^2)^2}$$

بمأن المقدار $(1-x^2)^2$ موجب ، يتعين علينا دراسة إشارة الجداء $(6x^4 + 4x^2 - 2)x^3$ ، لحل المعادلة $6x^4 + 4x^2 - 2 = 0$ يلزمنا تبديل المتغير بوضع $z = x^2$ ، بعد حل المعادلة نجد: $\left(z = -1 \vee z = \frac{1}{3}\right)$ ، الحل $z = -1$ مرفوض ، إذن الحلول هي: $\left(x = \frac{\sqrt{3}}{3} \vee x = \frac{-\sqrt{3}}{3}\right)$واللذان يعتبران نقاط انعطاف الدالة f .

والجدول التالي يبين تحدب وتقعر الدالة f .

x	-1	$\frac{-\sqrt{3}}{3}$		0		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		1
f''	$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	
التحدب/ التقعر	مقعرة		محدبة	‖	مقعرة		محدبة	

3) نتحقق من ذلك عبر طريقتين:

أولا: تطبيق مبرهنة القيم المتوسطة:

نعتبر الدالة f معرفة ومستمرة على المجال $J=[0\ ,\ 1]$.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty \Rightarrow \exists x_1 \in (0\ ,\ 1)\ \ ;\ \ f(x_1) < 0$$
$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty \Rightarrow \exists x_2 \in (0\ ,\ 1)\ \ ;\ \ f(x_2) > 0$$

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة فأن المعادلة $f(x)=0$ تقبل على الأقل حلا في هذا المجال.

ثانيا: بمأن f قابلة للاشتقاق على $I=(0\ ,\ 1)$ و f متزايدة تماما على المجال I ، ومنه المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا على هذا المجال.

7-1-2- القيم العظمى والصغرى لدوال متعددة المتغيرات:

لتكن الدالة $\begin{matrix} f: U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \to f(x,y) \end{matrix}$ (U مفتوحا من $\mathbb{R}^n$)[1]، و $(x_0,y_0)\in U$، إذا كانت (x_0,y_0) نقطة حدية محلية (نسبية)(نهاية عظمى أو صغرى) ، فأن:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = 0 .$$

تعريف:

---

[1]- وجب التنبيه إلى نقطة من خلال هذا الترميز فبعض $f: U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ المؤلفات يستخدمن $f: U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ، حيث: U يقصد به مجموعة تعريف الدالة f ، إذا كانت المسألة تحتوي على شروط فأن ($D \subseteq U$) ، معناها إذا كانت المسألة بدون شروط نكتب ($D = U$) ، وإذا كانت المسألة بشروط معناه ($D \subset U$).

لتكن الدالة $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ، ولتكن $(x_0, y_0) \in D$ ، حيث:

$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$ فأن (x_0, y_0) تسمى نقطة حرجة أو نقطة استقرار.

إن انعدام المشتقين الجزئيين $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ و $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ هو شرطا لازما لكي تقبل الدالة قيمة حدية عند (x_0, y_0)، لكن هذا الشرط غير كافي.

مثال2:

لتكن الدالة f ، حيث $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ معرفة كما يلي: $f(x, y) = 4 + x^3 + y^3 - 3xy$

حدد النقاط الحرجة لـ f وقيم $f(x, y)$ عند هذه النقاط.

حل المثال2:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 - 3y = 0 .....(1) \Rightarrow y = x^2 ......(3)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3y^2 - 3y = 0 .....(2)$$

نعوض (3) في (2) فينتج: $(x = 0) \vee (x = 1)$.

$$x = 0 \Rightarrow y = 0 \quad ; \quad (0,0)$$
$$x = 1 \Rightarrow y = 1 \quad ; \quad (1,1)$$
$$f(0,0) = 4 \quad , \quad f(1,1) = 3$$

التطبيق على Maple:

$f := (x, y) \rightarrow 4 + x^3 + y^3 - 3\,x \cdot y$

$$f := (x, y) \mapsto 4 + x^3 + y^3 - 3\,y\,x$$

$fx := \frac{d}{dx}\left(4 + x^3 + y^3 - 3\,x \cdot y\right)$

$$fx := 3\,x^2 - 3\,y$$

$fy := \frac{d}{dy}\left(4 + x^3 + y^3 - 3\,x \cdot y\right)$

$$fy := 3\,y^2 - 3\,x$$

$criticpts := [solve(\{fx = 0, fy = 0\})];$

$riticpts := [\{x = 0, y = 0\}, \{x = 1, y = 1\}, \{x = -RootOf(_Z^2 + _Z + 1) - 1, y = RootOf(_Z^2 + _Z + 1)\}]$

$f(0, 0);$

$$4$$

$f(1, 1)$

$$3$$

7-1-3- مبرهنة الشرط الكافي لوجود قيم حدية:

ذكرنا سابقا الشرط لوجود قيم حدية، لكن هذا خاص بمتغير واحد، على سبيل المثال نأخذ هذا المثال: في حالة متغيرين $f(x,y) = 2x^2 - 2y^2$ ، نرى أن $f(0,0) = 0$ ، $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ فعلى الرغم من انعدام $\frac{\partial f}{\partial x}$ و $\frac{\partial f}{\partial y}$ عند $(x_0, y_0) = (0,0)$، فلا توجد قيمة حدية عند $(0,0)$، لأن :

من أجل $x = 0$ و $y \neq 0$ ، $f(x,y) = -2y^2 < f(0,0) = 0$

من أجل $y = 0$ و $x \neq 0$ ، $f(x,y) = x^2 > f(0,0) = 0$

نص المبرهنة:

ليكن $\begin{matrix} f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \to f(x,y) \end{matrix}$ ، حيث: U مفتوحا من $\mathbb{R}^n$ و $(x_0,y_0) \in U$، يكون لـ f نهاية عظمى نسبية/ نهاية صغرى نسبية عند (x_0,y_0) إذا وفقط إذا تحققت الشروط التالية:

1- $f \in C^2$ (أي أن f لها مشتقات جزئية من المرتبة الثانية مستمرة، وبالتالي: $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ (**شرط شفارز** [1]).

2- $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = 0$.

3- المحدد الهيسي [2] $0 < |H|$أي:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) \end{vmatrix} > 0$$

تكون نهاية عظمى نسبية إذا كان $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) < 0$ ، ونهاية صغرى نسبية إذا كان $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) > 0$.

تعريف:

---

[1] - **كارل هيرمان أماندوس شفارز (1843- 1921) Karl Hermann Amandus Schwarz** ، رياضياتي ألماني عرف بأعماله حول التحليل العقدي.

[2] - **لودفيغ أوتو هيسه (1811 – 1874) Ludwig Otto Hesse** رياضياتي ألماني ولد في كونيغسبرغ، وكان عضوًا في الأكاديمية البافارية للعلوم والعلوم الإنسانية، والأكاديمية البروسية للعلوم.
ترجع تسمية هيسية إلى الرياضياتي الإنجليزي جيمس جوزيف سيلفستر (1814- 1894) James Joseph Sylvester الذي أطلق هذا الاسم تكريما للرياضياتي الألماني لودفيغ أوتو هيسه .

إذا تحقق الشرط (1) و (2) من المبرهنة السابقة ، وكان المحدد الهيسي $|H|<0$،
فتسمى النقطة (x_0,y_0) التي تحقق هذه الحالة بالنقطة السرجية saddle point
للدالة f .

أما إذا كان المحدد $|H|=0$، في الوهلة الأولى لا نستطيع الحكم على وجود حالة من
الحالات السابقة إلا إذا تفحصنا إشارة $f(x,y)-f(x_0,y_0)$ بجوار (x_0,y_0).

مثال3:

أوجد القيم الحدية للدالة $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ المعرفة بـ :

$$f(x,y)=3x^2y+y^3-3x^2-3y^2+2$$

حل المثال3:

يلزمنا إيجاد المشتقات الجزئية الأولى والثانية:

$$f_x=6xy-6x \quad , \quad f_y=3x^2+3y^2-6y$$
$$f_{xx}=6y-6 \quad , \quad f_{yy}=6y-6 \quad , \quad f_{xy}=f_{yx}=6x$$

إذن $f\in C^2$.

نحتاج لإيجاد القيم الحرجة إلى استخدام هذه المعادلات:

$$\begin{cases}6xy-6x=0............(1)\\3x^2+3y^2-6y=0....(2)\end{cases}$$

من (1)
$$6x(y-1)=0$$
$$x=0\vee y-1=0$$

لإيجاد النقاط الحرجة يمكننا تعويض هذه القيم في (2)، ويكون ذلك كما يلي:

$$x=0 \;;\; 3y^2-6y=3y(y-2)=0\Rightarrow y=0 \;,\; y=2$$
$$y=1 \;;\; 3x^2-3=3(x^2-1)=0\Rightarrow x=-1 \;,\; x=1$$

إذا كان $x=0$ فالنقاط الحرجة هي: $(0,1)$, $(0,0)$.

إذا كان $y=0$ فالنقاط الحرجة هي: $(1,1)$, $(-1,1)$، إذن الشرط الثاني محقق.

بقي لنا حساب المحدد الهيسي عند كل نقطة من النقاط المتحصل عليها.

$$D = D(x_0, y_0) = f_{xx}(x_0, y_0) \cdot f_{yy}(x_0, y_0) - \left[f_{xy}(x_0, y_0) \right]^2$$
$$\therefore \quad D(x_0, y_0) = (6y-6) \cdot (6y-6) - [6x]^2$$

$$(0,0) \quad ; \quad D(0,0) = 36 > 0 \quad , \quad f_{xx}(0,0) = -6 < 0$$
$$(0,2) \quad ; \quad D(0,2) = 36 > 0 \quad , \quad f_{xx}(0,2) = 6 > 0$$
$$(1,1) \quad ; \quad D(1,1) = -36 < 0$$
$$(-1,1) \quad ; \quad D(-1,1) = -36 < 0$$

فتصنيف النقاط الحرجة كما يلي:

$(0,0)$: نهاية عظمى نسبية.

$(0,2)$: نهاية صغرى نسبية.

$(1,1)$: نقطة سرجية

$(-1,1)$: نقطة سرجية.

7-1-4- النقاط الحدية المقيدة:

نفترض أن f و g دالتان قابلتان للإشتقاق باستمرار، نفترض أننا نريد إيجاد القيم العظمى والدنيا لـ f الخاضعة للقيد: $g(x,y)=c$ (حيث c ثابتة إلى حد ما)، في حالة حدوث حد أقصى أو أدنى، يجب أن يحدث في مكان يكون فيه تدريج f وتدريج g في

نفس الاتجاهين أو عكسهما، لذلك يجب أن يكون تدريج g أحد مضاعفات تدريج f، للعثور على القيمتين العظمى والصغرى (إن وجدت) ، نقوم فقط بحل جملة المعادلات الناتجة عنها:

$$\begin{cases} g(x,y)=c \\ \nabla f = \lambda \nabla g \end{cases}$$

تعريف :

لتكن $f,g:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ دالتين من جزء مفتوح، بحيث: $U \subset \mathbb{R}^2$ ، إذا قبلت f قيمة حدية عند (x_0,y_0) ، بحيث: $g(x,y)=0$ وإذا كان $\nabla g(x_0,y_0) \neq 0$ فأن:

$$\exists \lambda = (\lambda_1,\lambda_2,.....,\lambda_m) \in \mathbb{R}^m \;\; ; \;\; \nabla f(x_0) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(x_0)$$

سنعتمد على طريقة لاغرانج في معالجة هذه النقاط.

طريقة لاغرانج[1] (مضاعف لاغرانج أو اللاغرانجي):

---

[1]- **جوزيف لويس كونت دي لاغرانج Joseph Louis de Lagrange (1736 - 1813)** رياضي ايطالي- فرنسي ، ولد في مدينة تورينو عاصمة مملكة سردينيا آنذاك، و هي الدولة المؤسسة لمملكة إيطاليا الجديدة، حيث ضمت جميع الدول الإيطالية الأخرى. بالتالي استمرت المملكة قانونيًا في الدولة الجديدة حيث نقلت لها كامل مؤسساتها، لم يترك لاغرانج أي مجال تقريبا من الرياضيات في سنوات عمره إلا وأسهم فيه إسهاما كبيرا ، ولقد أوحت أعماله لكثير من الرياضيين البارزين في أن يكملوها منهم لابلاس وجون باتيست جوزيف فورييه وغاسبار مونج وأدريان ماري ليجاندر وأوغستين لوي كوشي ، فوضع لابلاس الخطوط العريضة في التصميم الذي غدا رياضيات حديثة تاركا التفاصيل ليملأها معاصروه أو من يأتي بعده ، مثل نيوتن الذي وضع أساس الفيزياء التقليدية بقوانينه الثلاثة في الحركة وبنظريته في الثقالة مقدما بذلك اللبنة الأولي ليبني بها لاحقا صرح عقلي عظيم ، وكان لاغرانج أحد هؤلاء الذي وجدوا في التصورات الرياضية الرائعة التي صاغها نيوتن مصدر وحيهم الأكبر.

ليكن :

$$L : U \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$$
$$\left(x, y, \lambda\right) \to L\left(x, y, \lambda\right) = f\left(x, y\right) - \lambda g\left(x, y\right)$$

λ :(مضاعف لاغرانج) وهو عدد حقيقي، ونجزم بأنه إذا كانت $\left(x_0, y_0\right)$ نقطة حدية للدالة f تخضع للقيد $g\left(x_0, y_0\right) = 0$ ، فأن λ يكون مضمون الوجود ، وبه تصبح $\left(x_0, y_0\right)$ حلا لجملة المعادلات التالية:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}\left(x, y, \lambda\right) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}\left(x, y, \lambda\right) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial \lambda}\left(x, y, \lambda\right) = 0 \end{cases}$$

تسمى هذه المعادلات بالشروط من الرتبة الأولى ، وعادة ما توضع تحت الشكل التالي:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}\left(x, y\right) = \lambda \frac{\partial f}{\partial x}\left(x, y\right) \\ \frac{\partial f}{\partial y}\left(x, y\right) = \lambda \frac{\partial f}{\partial y}\left(x, y\right) \\ g\left(x, y\right) = 0 \end{cases}$$

نرمز لـ $\left(x_0, y_0, \lambda_0\right)$ حل للجملة، إذا كان $\nabla g\left(x_0, y_0\right) \neq 0$ ، فأن $\left(x_0, y_0\right)$ نقطة حرجة للدالة f تحت القيد g ، هذه النقاط تفي أو تحقق القيد.

مثال4:

لدينا دالة الانتاج لمؤسسة تعمل في ظل ثبات الغلة ، دالة كوب دوغلاس[1] لهذه المؤسسة تعطى كما يلي: $\mathrm{R}(K,L)=200\cdot K^{\frac{1}{3}}L^{\frac{2}{3}}$ ، ومعالم الميزانية هي كما يلي: $P_K=170\ ,\ P_L=20\ ,\ B=20000$ ، نريد تعظيم الدالة $\mathrm{R}(K,L)$ في ظل القيد : $20000=20L+170K$.

حل المثال4:

دالة لاغرانج التي وجب تعظيمها هي كما يلي:

$$L(K,L,\lambda)=200\cdot K^{\frac{1}{3}}L^{\frac{2}{3}}+\lambda(20000-20L-170K)$$

الخطوة الموالية تعيين الدرج ∇L مساوي إلى 0 شعاع.

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial L}(L,K,\lambda)=0\\ \dfrac{\partial f}{\partial K}(L,K,\lambda)=0\\ \dfrac{\partial f}{\partial \lambda}(L,K,\lambda)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{400}{3}\cdot K^{\frac{1}{3}}L^{-\frac{1}{3}}-20L=0\\ \dfrac{200}{3}\cdot K^{-\frac{2}{3}}L^{\frac{2}{3}}-170K=0\\ 20000-20L-170K=0\end{cases}$$

بعد حل الجملة نجد:

$$K=\frac{2000}{51}\simeq 39\ \ ,\ L=\frac{2000}{3}\simeq 667\ \ ,\ \lambda\approx 2.593$$

[1] - دالة الإنتاج **كوب-دوغلاس**: هي شكل من أشكال دوال الإنتاج، نستطيع القول انه تابع رياضي اقتصادي يفسر السلوك الإنتاجي وعلاقته بعوامل الإنتاج ، و يمكن ان يستخدم في دراسة عملية الإنتاج على مستوى المؤسسة وفي دراسة عمليات الإنتاج على مستوى الاقتصاد ككل.
قام كل من الاقتصادي الأمريكي **بول دوغلاس Paul Howard Douglas (1976 -1892)** والرياضياتي كوب **Charles Wiggins Cobb (1875–1949)** بطرحهما لهذا النموذج عام 1929 ، وكان الهدف في البداية هو التحقق إذا كان التحليل الإحصائي يستطيع أن يؤكد وجود قوانين كمية للإنتاجية الحدية وتأثير تلك الإنتاجية في مستوى الإنتاج.

هذا يعني إذا وظفت 39 وحدة نقدية و 667 ساعة عمل يعطي أقصى إيراد بـ:

$$R(667,39)=200\cdot(39)^{\frac{1}{3}}(667)^{\frac{2}{3}}=51777$$

تطبيق1:

أوجد القيم الحدية للدوال التالية حيث: $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ المعرفة بـ :

$$1)\ f(x,y)=x^2+xy+y^2-3x-6y$$
$$2)\ f(x,y)=x^2+2y^2-2xy-2y+1$$

حل التطبيق1:

$$1)\ f(x,y)=x^2+xy+y^2-3x-6y$$

يلزمنا إيجاد المشتقات الجزئية الأولى والثانية:

$$f_x=2x+y-3\quad,\quad f_y=x+2y-6$$
$$f_{xx}=2\quad,\quad f_{yy}=2\quad,\quad f_{xy}=f_{yx}=1$$

إذن $f\in C^2$.

نحتاج لإيجاد القيم الحرجة إلى استخدام هذه المعادلات:

$$\begin{cases}2x+y-3=0............(1)\\x+2y-6=0...........(2)\end{cases}$$

بعد حل الجملة: $\begin{cases}x=0\\y=3\end{cases}$ ، هناك نقطة وحيدة وهي : $(0,3)$.

بقي لنا حساب المحدد الهيسي عند هذه نقطة ، وتبين أنها نقطة صغرى نسبية.

$$D = D(x_0, y_0) = f_{xx}(x_0, y_0) \cdot f_{yy}(x_0, y_0) - \left[f_{xy}(x_0, y_0) \right]^2$$
$$\therefore \quad D(x_0, y_0) = (2)\cdot(2) - [1]^2 = 3 > 0 \ , \ f_{xx} = 2 > 0$$

$$2)\ f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 2xy - 2y + 1$$

يلزمنا إيجاد المشتقات الجزئية الأولى والثانية:

$$f_x = 2x - 2y \quad , \quad f_y = 4y - 2x - 2$$
$$f_{xx} = 2 \ , \quad f_{yy} = 4 \ , \quad f_{xy} = f_{yx} = -2$$

إذن $f \in C^2$.

نحتاج لإيجاد القيم الحرجة إلى استخدام هذه المعادلات:

$$\begin{cases} 2x - 2y = 0 \\ 4y - 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

هناك نقطة وحيدة وهي : $(1,1)$.

بقي لنا حساب المحدد الهيسي عند هذه نقطة ، وتبين أنها نقطة صغرى نسبية.

$$D = D(x_0, y_0) = f_{xx}(x_0, y_0) \cdot f_{yy}(x_0, y_0) - \left[f_{xy}(x_0, y_0) \right]^2$$
$$\therefore \quad D(x_0, y_0) = (2)\cdot(4) - [-2]^2 = 4 > 0 \ , \ f_{xx} = 2 > 0$$

تطبيق2:

نريد تعظيم دالة المنفعة، تعطى كما يلي: $Max : UT = 2xy$ ، ومعالم الدخل هي كما يلي: $P_y = 4 \ , \ P_x = 10 \ , \ R = 200$ ، في ظل القيد : $200 = 10x + 4y$.

حل التطبيق2:

دالة لاغرانج التي وجب تعظيمها هي كما يلي:

$$L(x,y,\lambda)=2xy+\lambda(200-10x-4y)$$

لتعظيم دالة المنفعة يجب تعظيم دالة لاغرنج و لتحقيق ذلك يجب توفر شرطين هما:

أ/ الشرط اللازم: تعيين التدريج ∇L مساوي إلى 0 شعاع بالنسبة لـ x, y , λ على الترتيب.

ب/ الشرط الكافي: المحدد الهيسي موجب.

- الخطوة 1: تعيين التدريج ∇L مساوي إلى 0 شعاع.

$$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,\lambda)=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,\lambda)=0\\ \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x,y,\lambda)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2y-10\lambda=0\\ 2x-4\lambda=0\\ 200-10x-4y=0\end{cases}$$

بعد حل الجملة نجد:

$$x=10\ \ ,\ \ y=25\ ,\ \ \lambda=5$$

λ :هو مضاعف لاغرانج و يشير إلى المعدل الهامشي لتغير القيمة المثلى لدالة الهدف بالنسبة لتغير القيد ، اقتصاديا المنفعة الحدية لدخل المستهلك (التغير في المنفعة الكلية الناتج عن تغير دخل المستهلك) ، أي عدد وحدات المنفعة التي يحققها آخر دينار ينفق على شراء السلع.

- الخطوة 2: حساب المحدد الهيسي يكون كما يلي:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial \lambda} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial \lambda} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda \partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda \partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -10 \\ 2 & 0 & -4 \\ -10 & -4 & 0 \end{vmatrix} = 160 > 0$$

هذا يعني أن $(10,25)$ تعطي أقصى منفعة لهذا المستهلك، والمقدرة بـ: 500 و.م

7-2- شروط تحقيق الأمْثَلة المحلية:

في مسائل الأمْثَلة المحلية [1] نبحث عن حل أفضل من الجوار، فيما يخص مسألة التدنية غير المقيدة لا توجد قواعد غير قابلة للحل إذ نبحث عن حل ذي قيمة هدف أقل من جواره، هناك شرطان ضروريان لتحديد مثل هذا الحل:

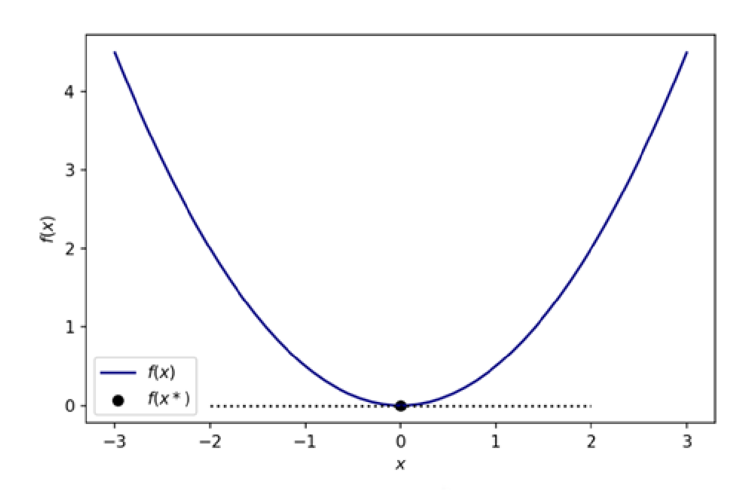
1- إذا كانت x^* عبارة عن مُصغر محلي local minimizer وكانت f مستمرة وقابلة للاشتقاق في مفتوح لـ x^* ، يجب أن يكون تدريج (Gradient) f (∇f) مساوي للصفر.

2- إذا كانت المصفوفة الهيسية[2] (Hessian matrix) للهدف f بالنسبة إلى x موجودة ومستمرة في مفتوح لـ x^* ، فيجب أن تكون المصفوفة $\nabla^2 f$ شبه معرفة موجبة[1] positive semi-definite.

[1]- في الأمْثَلة الرياضية تكون شروط الأمثلية عبارة عن مجموعة من المعادلات وعدم المساواة والتعبيرات المتنوعة (على سبيل المثال: إيجابية المصفوفات) التي يتم التحقق منها عن طريق حل مسألة التحسين و التي تجعل من الممكن تأكيد النقطة التي تحقق حل مسألة التحسين .

[2] - المصفوفة الهيسية أو الهيسيان هي مصفوفة مربعة مكونة من المشتقات الجزئية الثانية لدوال متعددة المتغيرات ، حيث تصف الانحناء المحلي لهذه الدالة ، تم تطوير هذه المصفوفة في القرن التاسع عشر من قبل الألماني لودفيج أوتو

بعبارة أبسط يكون ميل دالة الهدف بالنسبة إلى x صفرا في المستوى المحلي الأمثل ، وعندما يتغير فإنه يرتفع في أي اتجاه (أنظر الصورة أدناه) .



7−3− شروط كاروش− كوهن− تاكر The Karush[2]−Kuhn−Tucker (KKT) conditions :

تسمى الشروط اللازمة للأَمْثَلة المحلية المقيدة بـ Kuhn−Tucker ، حيث تلعب هذه الشروط دورا مهما للغاية في التحسين المقيد.

نموذج المسألة:

هيسه Ludwig Otto Hesse ويرجع أصل تسمية الهيسان إلى الرياضي الإنجليزي جيمس جوزيف سيلفستر الذي أطلق هذا الاسم تكريما للرياضي الألماني لودفيغ أوتو هيسه.

[1]- مصفوفة شبه معرفة موجبة $A \in \Re^{n\times n}$ تعتبر مصفوفة شبه معرفة موجبة (PSD) ويرمز لها بالرمز $A \geq 0$ إذا كان: $A = A^T$ و $\forall x \in \Re^n,\ x^T Ax \geq 0$.

ملاحظة: المصفوفة **A** تعتبر مصفوفة معرفة موجبة إذا $A > 0$ وهي تعتبر مصفوفة (PSD) والتي تستوفي الشرط: لكل شعاع غير الصفري x حيث : $x^T Ax > 0$.

[2] - **ويليام كاروش (1917 - 1997) William Karush** رياضياتي أمريكي اشتهر بمساهمته حول شروط KKT كاروش كون تاكر **Karush–Kuhn–Tucker conditions** .

نعتبر مسألة الأمْثَلة التالية:

$$\begin{aligned}&\text{Min}\,\mathrm{f}\left(x\right)\\&ST:\begin{cases}h\left(x\right)=0\\g\left(x\right)\leq 0\end{cases}\end{aligned}$$

حيث: $f:\mathbb{R}^{n}\rightarrow\mathbb{R}\ ,\ \ h:\mathbb{R}^{n}\rightarrow\mathbb{R}^{m}\ ,\ \ g:\mathbb{R}^{n}\rightarrow\mathbb{R}^{p}$

تعريف:

بالنسبة للمتباينة $g_i\left(x\right)\leq 0$ نقول عن القيد أنه نشط في x^* إذا كان $g_i\left(x^*\right)=0$ ، ويكون غير نشط في x^* إذا كان $g_i\left(x^*\right)<0$.

في الأمْثَلة الرياضياتية تلعب هذه الشروط دورا مهما للغاية في نظرية الأمْثَلة المقيدة.

فيما يخص البرمجة غير الخطية تعمم شروطKKT طريقة مضاعفات لاغرانج والتي تسمح فقط بقيود المساواة، تتم إعادة كتابة مسألة التعظيم (التدنية) المقيدة كدالة لاغرانج التي تكون نقطتها المثلى هي نقطة سرجية ، أي الحد الأقصى (الحد الأدنى) على مجال متغيرات الاختيار والحد الأدنى (الحد الأقصى) فوق المضاعفات ، ولهذا السبب يشار أحيانا إلى نظرية KKT باسم نظرية النقطة السرجية.

حتى الأن لدينا مجموعة صغيرة من الأساليب لاستخدامها في حل مسائل البرمجة غير الخطية المقيدة أو غير المقيدة لإيجاد أمْثَلة محلية، من الناحية العملية يتم دائما تنفيذ هذه في برامج الكمبيوتر التي ستقرأ نموذجا في شكل ما ، وتحسب لفترة من الوقت وتنتج في النهاية بعض المخرجات، ولكن هناك مجموعة متنوعة من المخرجات المحتملة ، والتي يصعب تفسير بعضها، ماذا يعني إذا لم يحرز البرنامج أي تقدم لـ

30 تكرارا ؟ هل هذا يعني أنها حقا في المستوى المحلي الأمثل؟ أم يعني أنه لا يبحث في منطقة واعدة.

أفضل مخرج ممكن لهذا البرنامج هو الذي ينص على أنه تم العثور على أفضل محلي، لكن كيف يعرف هذا البرنامج ذلك؟ الجواب: عادة ما يكون ذلك بسبب فحصه لشروط KKT ، حيث تستخدم هذه الشروط لاختبار نقطة وتحديد ما إذا كانت نقطة حرجة في برنامج غير خطي مقيد أم لا، في الواقع لا يحدد ما إذا كانت هذه النقطة هي نقطة محلية مثلى أم أنها نقطة حرجة (يمكن أن تكون حدا أقصى محليا ، أو حدا أدنى محليا ، أو نقطة سرجية)، ومع ذلك ونظرا لأن البرنامج يعمل نحو هدف معين (التعظيم أو التدنية) فمن الرهان الجيد أن النقطة التي تفي بشروط KKT هي أفضل محلي من النوع الذي يسعى إليه هذا البرنامج.

تدرك شروط KKT أن هناك احتمالين مختلفين للنقطة المثلى المحلية:

أ- لا توجد قيود نشطة عند النقطة المحلية المثلى، بعبارة أخرى يوجد حد أقصى محلي "للتل"hill" maximum" (أو "الحد الأدنى" للواديvalley" minimum") في دالة الهدف ليس بالقرب من القيمة المحددة لأي قيد، في مثل هذه الحالة سيكون التدريج صفرا ($\nabla f(x)=0$) عند النقطة المثلى المحلية ، وفي الواقع يمكن استخدام المحدد الهيسي لتحديد ما إذا كان الحد الأقصى المحلي ، أو الحد الأدنى المحلي ، أو النقطة السرجية.

ب- قيد واحد على الأقل نشط عند النقطة المحلية المثلى، في هذه الحالة هناك بعض القيود التي تمنع طريقة البحث من تحسين قيمة دالة الهدف في نقطة ، في مثل هذه الحالة لا يكون تدريج دالة الهدف صفرا (أي $\nabla f(x)\neq 0$) ولا يمكن استخدام المحدد الهيسي لتحديد الحالة المثلى ونوع الأمْثَلة.

عبقرية شروط KKT هي أنها تتعامل مع كلا الاحتمالين في وقت واحد، سنبدأ بملاحظة بسيطة.

ملاحظة: في الحالة (**ب**)، نعرف كيفية استخدام طريقة لاغرانج لقيود المساواة ، لذلك ستعمل هذه الطريقة إذا كانت هناك **قيود مساواة فقط** ، ولكن كيف نتعامل مع **قيود عدم المساواة** ؟ عند إعطاء نقطة للاختبار يمكننا تحديد ما إذا كانت المتباينة نشطة (أي النقطة التي تكمن في القيمة المحددة لعدم المساواة) وفي هذه الحالة يمكننا التعامل معها كما لو كانت قيدا للمساواة .

إذا كانت المتباينة غير نشطة $(0<)$ فيمكننا تجاهلها، لتجاهل متباينة غير نشطة ما علينا سوى تعيين مضاعف لاغرانج ($\boldsymbol{\lambda = 0}$).

نكتب دائما معادلات القيد بحيث يكون الثابت RHS صفرا، على سبيل المثال:

$2x^2+4y^3\leq 5$ يصبح قيد مثل: $g(x)=2x^2+4y^3-5\leq 0$

- القيود النشطة الأن لها قيمة مساوية للصفر، على سبيل المثال $g(x)=0$.
- القيود غير النشطة لها قيمة دالة لا تساوي الصفر، على سبيل المثال g (x)= −6 .
- لذلك يكون لدينا دائما $\lambda_i g_i(x)=0$ لـ $i=1,2,...,m$ حيث يوجد m قيد يغطي

كلا من القيود النشطة وغير النشطة في حزمة واحدة مرتبة إما $g_i(x)=0$ لأن القيد نشط ، أو $\lambda_i=0$ لأن المتباينة غير نشطة ، هذا هو شرط التعامد ونعبر عنه على الشكل المصفوفي $\lambda^T g(x)=0$.

لنلاحظ الأن إذا كان بإمكاننا استخدام هذه العناصر الثلاثة لتحديد ما إذا كانت نقطة معينة هي نقطة حرجة في البرمجة غير الخطية المقيدة بعدم المساواة: (1) شرط تدريج لاغرانج (2) حالة التعامد (3) قيود عدم المساواة الأصلية .

سنضيف قيود المساواة إلى هذه العناصر لاحقا، لنعبر عن هذه الشروط الثلاثة بجملة من المتباينات m لـ n متغير:

شرط تدريج لاغرانج: $\frac{\partial L(x,\lambda)}{\partial x_j}=0 \quad ; \quad j=1,...,n$

شرط التعامد: $\lambda_i g_i(x)=0 \quad ; \quad i=1,...,m$

المتباينات الأصلية: $g_i(x)\leq 0 \quad ; \quad i=1,...,m$

في هذه المرحلة نذكر أن مضاعف لاغرانج λ_i يمكن أن يكون موجبا أو سالبا لقيود المساواة، هذا لأنه لا يمكننا الخروج من قيد المساواة على أي حال ، لذلك لا يهم ما إذا كان الاتجاه المتزايد لتدريج القيد في نفس اتجاه تدريج الهدف (يعطي مضاعفا موجبا) ، أو في الاتجاه المعاكس (يعطي مضاعفا سالبا).

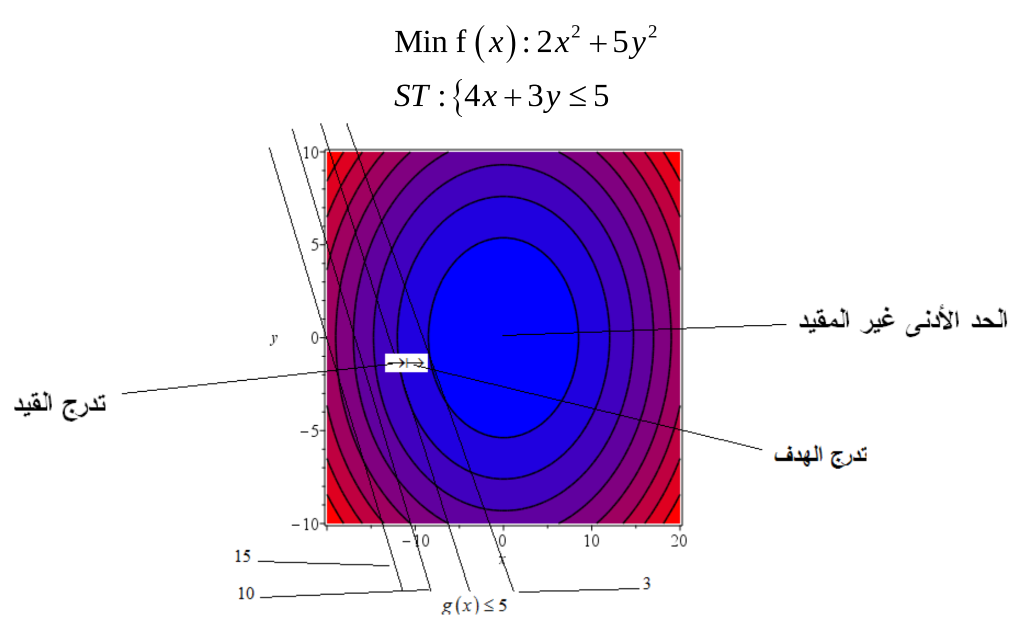
لكن اشارة λ_i تحدث فرقا في قيود عدم المساواة النشطة، لماذا ؟ لأنه بمجرد أن النقطة التي نختبرها تجعل عدم المساواة نشطة فهذا لا يعني أن عدم المساواة تمنعنا من تحسين قيمة دالة الهدف، قد يكون التحرك نحو الجزء الداخلي للقيد سيحسن من قيمة دالة الهدف، لنتخيل أننا بجوار السياج (القيد) على جانب تل (دالة الهدف) ونريد الوصول إلى قمة التل، قيد السياج نشط لأننا بجانبه، هناك احتمالان: (1) يبقينا السياج على جانب الصعود وفي هذه الحالة لا يوجد ما يمنعنا من المشي مباشرة إلى أعلى التل، بعبارة أخرى نحن في مرحلة يكون فيها القيد نشطا ، لكنه لا يمنعنا من تحسين قيمة دالة الهدف (2) يبقينا السياج على جانب النزول من التل ، وفي هذه الحالة يكون نشطا ويمنعنا من الصعود إلى أعلى التل.

نحتاج إلى التمييز بين هاتين الحالتين لتحديد ما إذا كانت نقطة معينة هي نقطة محلية مثلى، في حالة (1) لم نكن في المستوى المحلي الأمثل ، ولكن في حالة (2) تخبرنا اشارة مضاعف لاغرانج ما إذا كنا في الحالة (1) أو الحالة (2).

كيف يعمل هذا؟ أولا: نضع جميع قيود عدم المساواة في شكل أقل من أو يساوي ، $g_i(x) \leq 0 \quad ; \quad i = 1,\ldots,m$ ، كالعادة يشير تدريج الدالة إلى الاتجاه المتزايد، لذلك إذا كان القيد من هذا النموذج نشطا فسيتم منع الحركة في اتجاه التدريج: يمنع القيد $g_i(x)$من الزيادة، لنفترض الأن أننا نرغب في تعظيم دالة الهدف: هذا يعني أننا نريد التحرك في اتجاه تدريج دالة الهدف، ومن ثم إذا كنا في مرحلة ما ونحاول التحرك في اتجاه دالة الهدف ، لكن المتباينة نشطة وتدريجها في نفس اتجاه دالة الهدف ، فسيكون مضاعف لاغرانج موجبا وستكون في حالة (2) أعلاه أي على المستوى الأمثل المحلي، نوضح ذلك في الشكل التالي:

$$\text{Min f}(x): 2x^2 + 5y^2$$

$$ST: \{4x + 3y \le 5$$



بعض خطوط التدريج للقيود المخططة في الشكل السابق جنبا إلى جنب مع قيمة الدالة في كل خط من الخطوط كما نلاحظ ، فإن التحرك في اتجاه التدريج المقيد يمنعه القيد: فهو لا يسمح بقيم $g(x)$ أكبر من 5، ولكن يحدث أن يكون التدريج الهدف في نفس الاتجاه : إذا تعاملنا مع عدم المساواة على أنها مساواة سنجد أن مضاعف لاغرانج له قيمة موجبة.

إذا كان تدريج القيد يشير في الاتجاه المعاكس لذلك الموضح في الشكل السابق ، فإن التحرك لأسفل وإلى اليسار سيكون الاتجاه الممنوع للحركة ، حتى نتمكن من الصعود إلى أعلى تل الهدف أي إلى أقصى نقطة غير المقيدة، في هذه الحالة فإن معاملة عدم المساواة على أنها مساواة ينتج عنها مضاعف لاغرانج سالب.

لذلك نلاحظ أن قيد عدم المساواة يكون ضيقا فقط و " **يحتفظ** " بالنقطة التي يكون فيها مضاعف لاغرانج موجبا (بالنسبة للمتباينة $g_i(x) \le 0$) و يقودنا هذا إلى حالة عدم سالبية مضاعف لاغرانج لقيود عدم المساواة (نذكر أن المضاعف يمكن أن يكون صفرا إذا كانت المتباينة غير نشطة).

يعمل شرط اللاسالبية طالما أن قيود عدم المساواة تفي بمؤهلات القيد: يجب أن تكون تدريجات القيود مستقلة خطيا عند النقطة التي يتم اختبارها.

ملاحظة:

إذا أدخلنا متغيرات الفجوة (مكملة) s في القيود ، يتم تعديل كتابة شروط Kuhn–Tucker كما يلي:

$$g(x)+s=b$$
$$L(x,s,\lambda)=f(x)-\lambda\left(g(x)+s-b\right)$$

لتحقيق عدم سالبية s نضع $s=t^2\,(t\in\Re)$ وتصبح الكتابة السابقة كما يلي:

$$g(x)+t^2=b$$
$$L\left(x,t^2,\lambda\right)=f(x)-\lambda\left(g(x)+t^2-b\right)$$

من الواضح أنه إذا كانت هناك m متباينة فإننا نحتاج إلى إدخال m متغير مكمل بمجرد تحويل جميع قيود عدم المساواة إلى مساواة ، يمكننا استخدام طريقة مضاعف لاغرانج العادية من حيث الجوهر ، فإن إدخال متغيرات المكملة هو إعادة صياغة مسألة التحسين الأصلية في فضاء ذو بعد أعلى ، بحيث تصبح النقاط الحدية التي تفرضها المساواة فضاء ، فمثلا: على سبيل المثال ، المتباينة $x^2+y^2\le 1$ (لها ميدان دائري) في المستوى ثنائي الأبعاد (D2) ؛ عندما يتم تغييره إلى المساواة $x^2+y^2+t^2-1=0$ ، يصبح هذا الميدان الدائري مخروطا في ثلاثي الأبعاد ، حيث: $s\in[0,1]$ بدلا من ذلك يمكننا عرض الميدان الدائري على المستوى ثنائي الأبعاد مثل إسقاط المخروط ثلاثي الأبعاد على المستوى (s = 0) .

مثال5:

لدينا مسألة التدنية التالية:

$$Min\ f\left(x_1,x_2\right)=-2x_1^2-2x_1x_2-2x_2^2+8x_1+12x_2$$
$$ST\left\{x_1+2x_2\le 3\right.$$

المطلوب:

بالاستعانة بشروط KKT ، استخدم متغير الفجوة (المكمل)، بعدها طبق طريقة لاغرانج لإيجاد الحل الأمثل؟

حل المثال5:

$$L\left(x_1,x_2,t,\lambda\right)=-2x_1^2-2x_1x_2-2x_2^2+8x_1+12x_2-\lambda\left(x_1+2x_2+t^2-3\right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1}=-4x_1-2x_2+8-\lambda=0.............(1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2}=-4x_2-2x_1+12-2\lambda=0.........(2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial t}=2t\lambda=0...................................(3)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}=x_1+2x_2+t^2-3=0................(4)$$

من (1) و (2) نجد:

$$x_1=\frac{2}{3}\quad ,\quad x_2=\frac{16-3\lambda}{6}$$

نعوض x_1 و x_2 في (4) بعد دراسة الشرط (3):

من (3)، هناك حالتين: $\lambda=0\vee t=0$

في حالة : $\lambda=0$ وبعد التعويض x_1 و x_2 في (4) نجد: $3+t^2=0$ (غير ممكن لأن $t\in\Re$).

في حالة : $t=0$ وبعد التعويض x_1 و x_2 في (4) نجد: $\lambda=3$.

إذن الحلول المثلى: $x_2=\frac{7}{3}$, $x_1=\frac{2}{3}$.

$$Min\ f\left(\frac{2}{3},\frac{7}{3}\right)=-2\left(\frac{2}{3}\right)^2-2\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{7}{3}\right)-2\left(\frac{7}{3}\right)^2+8\left(\frac{2}{3}\right)+12\left(\frac{7}{3}\right)=\frac{85}{6}$$

التطبيق على برنامج Maple :

```
> restart
> with(linalg) :
> f1 := 8· x[1] + 12·x[2] − 2· x[1]^2-2· x[2]^2 − 2·x[1]·x[2]
```

$$f1 := -2x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_2^2 + 8x_1 + 12x_2$$

```
>
> f:= 2 x_1^2 + 2 x_1 x_2 + 2 x_2^2 − 8 x_1 − 12 x_2
```

$$f := 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 8x_1 - 12x_2$$

```
>
> g := (x[1]) + 2·(x[2]) -3 #g≤=0
```

$$g := x_1 + 2x_2 - 3$$

```
> -x[1] ≤ 0
```

$$-x_1 \le 0$$

```
> -x[2] ≤ 0
```

$$-x_2 \le 0$$

```
> vars := [x[1], x[2]]
```

$$vars := [x_1, x_2]$$

```
> H := hessian(f, vars); definite(H,'negative_semidef')
```

$$H := \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

false

```
> grad_f := grad(f, vars)
```

$$grad_f := \begin{bmatrix} 4x_1 + 2x_2 - 8 & 2x_1 + 4x_2 - 12 \end{bmatrix}$$

```
> grad_g := grad(g, vars)
```

$$grad_g := \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$$

```
>
> eq[1] := grad_f[1] + λ·grad_g[1]
```

$$eq_1 := \lambda + 4x_1 + 2x_2 - 8$$

```
> eq[2] := grad_f[2] + λ·grad_g[2]
```

$$eq_2 := 2\lambda + 2x_1 + 4x_2 - 12$$

```
> comp_slack := λ·g = 0
```

$$comp_slack := \lambda\,(x_1 + 2x_2 - 3) = 0$$

```
> structural[1] := g ≤ 0
```

$$structural_1 := x_1 + 2x_2 \le 3$$

```
> solve({eq[1], eq[2], comp_slack, λ ≥ 0, structural[1]})
```

$$\left\{\lambda = 3, x_1 = \frac{2}{3}, x_2 = \frac{7}{6}\right\}$$

```
> sol := assign(%)
```

$$sol := (\ )$$

```
> subs(sol, f1)
```

$$\frac{85}{6}$$

مثال6:

إليك المسألة التالية المتعلقة بالبرمجة غير الخطية، المطلوب حلها باستخدام شروط KKT .

$$\text{Min f}(x): 2x^2 + 5y^2$$

$$ST: \begin{cases} 4x + 3y = 5 \\ -2x + 5y \le 10 \end{cases}$$

حل المثال6:

1) $g_i\left(x^*\right)-b_i \quad , \quad i=1,...,m$

2) $\nabla f\left(x^*\right)-\sum_{i=1}^{m}\nabla g_i\left(x^*\right)=0$

$$\begin{bmatrix}4x\\10y\end{bmatrix}-\lambda_1\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}-\lambda_2\begin{bmatrix}2\\-5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

لدينا 4 معادلات:

$$\begin{bmatrix}4 & 3 & 0 & 0\\2 & -5 & 0 & 0\\4 & 0 & -4 & -2\\0 & 10 & -3 & 5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\y\\\lambda_1\\\lambda_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\-10\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix}4 & 3 & 0 & 0\\2 & -5 & 0 & 0\\4 & 0 & -4 & -2\\0 & 10 & -3 & 5\end{bmatrix} \;,\; b=\begin{bmatrix}5\\-10\\0\\0\end{bmatrix} \;,\; AX=b\Rightarrow X=A^{-1}\cdot b \;,\; X=\begin{bmatrix}\frac{-5}{26}\\\frac{25}{13}\\\frac{225}{169}\\\frac{-515}{169}\end{bmatrix}$$

النقطة $\left(\frac{-5}{26},\frac{25}{13}\right)$ تفي بالقيدين السابقين مما يعني أنها تنتمي إلى المجال المسموح به (تمثل نقطة تقاطع خطي المستقيمان اللذان يمثلان هاذان الشرطان ، لكن هذه النقطة ليست مثالية لأن $\lambda_2<0$ (يجب أن يكون موجب)، نستمر في المناقشة إلى أن نصل إلى الحل الأمثل.

$$\begin{bmatrix} 4x \\ 10y \end{bmatrix} - \lambda_1 \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} - 0 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

لدينا 3 معادلات:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & -4 \\ 0 & 10 & -3 \end{bmatrix} \ , \ b = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \ , \ \Rightarrow X = A^{-1}b = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \lambda_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{50}{49} \\ \frac{15}{49} \\ \frac{50}{49} \end{bmatrix}$$

التطبيق على برنامج Maple :

```
> restart
> with(linalg) :
> f1 := 2·x[1]^2 + 5· x[2]^2
```

$$f1 := 2\,x_1^2 + 5\,x_2^2$$

```
>
> f := -2·x[1]^2-5· x[2]^2
```

$$f := -2\,x_1^2 - 5\,x_2^2$$

```
>
> g1 := 4·(x[1]) + 3·(x[2]) -5 #g1=0
```

$$g1 := 4\,x_1 + 3\,x_2 - 5$$

```
> g2 := -2·(x[1]) + 5·(x[2]) -10 #g2≤0
```

$$g2 := -2\,x_1 + 5\,x_2 - 10$$

```
> -x[1] ≤ 0
```

$$-x_1 \leq 0$$

```
> -x[2] ≤ 0
```

$$-x_2 \leq 0$$

```
> vars := [x[1], x[2]]
```

$$vars := [x_1, x_2]$$

> $H := hessian(f, vars); definite(H,'negative_semidef')$

$$H := \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -10 \end{bmatrix}$$

true

> $grad_f := grad(f, vars)$

$$grad_f := \begin{bmatrix} -4\,x_1 & -10\,x_2 \end{bmatrix}$$

> $grad_g1 := grad(g1, vars)$

$$grad_g1 := \begin{bmatrix} 4 & 3 \end{bmatrix}$$

> $grad_g2 := grad(g2, vars)$

$$grad_g2 := \begin{bmatrix} -2 & 5 \end{bmatrix}$$

> $eq[1] := grad_f[1] + \lambda 1 \cdot grad_g1[1]$

$$eq_1 := 4\,\lambda 1 - 4\,x_1$$

> $eq[2] := grad_f[2] + \lambda 1 \cdot grad_g1[2]$

$$eq_2 := 3\,\lambda 1 - 10\,x_2$$

> $eq[3] := grad_f[1] + \lambda 2 \cdot grad_g2[1]$

$$eq_3 := -2\,\lambda 2 - 4\,x_1$$

> $eq[4] := grad_f[2] + \lambda 2 \cdot grad_g2[2]$

$$eq_4 := 5\,\lambda 2 - 10\,x_2$$

> $comp_slack1 := \lambda 1 \cdot g1 = 0$

$$comp_slack1 := \lambda 1\,(4\,x_1 + 3\,x_2 - 5) = 0$$

> $comp_slack2 := \lambda 2 \cdot g2 = 0$

$$comp_slack2 := \lambda 2\,(-2\,x_1 + 5\,x_2 - 10) = 0$$

> $structural[1] := g1 = 0$

$$structural_1 := 4\,x_1 + 3\,x_2 - 5 = 0$$

> $structural[2] := g2 \le 0$

$$structural_2 := -2\,x_1 + 5\,x_2 \le 10$$

> $solve(\{eq[1], eq[2], comp_slack1, \lambda 1 \ge 0, comp_slack2, \lambda 2 \ge 0, structural[1], structural[2]\})$

$$\left\{\lambda 1 = \frac{50}{49}, \lambda 2 = 0, x_1 = \frac{50}{49}, x_2 = \frac{15}{49}\right\}$$

```
> sol := assign(%)
```

$$sol := (\ )$$

```
> subs(sol, f1)
```

$$\frac{125}{49}$$

7-4- البرمجة التربيعية Quadratic Programming :

البرمجة التربيعية (QP) هي نوع من أنواع البرمجة غير الخطية المستخدمة في الأمْثَلة الرياضياتية ، حيث تكون دالة الهدف تربيعية (غير خطية) والقيود خطية، تعتبر المسائل من هذا النوع مهمة في حد ذاتها وكثرة تطبيقاتها في الهندسة والاقتصاد.

يمكن ذكر مسألة البرمجة التربيعية العامة على النحو التالي:

$$Min\ f(x) = \frac{1}{2} x^T Q x + c^T x$$

$$ST \begin{cases} Ax = b \\ Dx \le g \end{cases}$$

حيث:

x : شعاع عمودي $(n \times 1)$ يشير إلى متغيرات القرار $x = [x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n]^T$.

Q: مصفوفة متماثلة $(n \times n)$ تصف معاملات العبارات التربيعية في دالة الهدف.

c : شعاع عمودي $(n \times 1)$ يصف معاملات العبارات الخطية في دالة الهدف.

A : مصفوفة ذات بعد $(m \times n)$ تصف معاملات العبارات الخطية الخاصة بالقيود.

b: شعاع عمودي ذو m صف ، يمثل الجانب الأيمن للمعاملات الخاصة بالقيود.

D : مصفوفة ذات بعد $(p \times n)$.

g : شعاع عمودي $(p \times 1)$.

المسألة لها n متغيرات القرار، و m قيود المساواة و p قيود المتباينة، إذا كانت المصفوفة Q مصفوفة شبه معرفة موجبة ، فإن المسألة هي برمجة تربيعية محدبة.

مثال 7:

نعتبر المسألة التربيعية التالية:

$$Min\ f(x) = 4x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 5x_2^2 + 4x_2x_3 + 2x_3^2 + 5x_1 - 4x_2 + 2x_3$$
$$ST = \begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

المطلوب:

كتابة الشكل التربيعي السابق على الشكل المصفوفي؟

حل المثال 7:

$$Min\ f(x) = \frac{1}{2}x^T Qx + c^T x$$

$$\frac{1}{2}x^T Qx = \frac{1}{2}[x_1, x_2, x_3] \cdot \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{12} & q_{22} & q_{23} \\ q_{13} & q_{23} & q_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \frac{1}{2}\left[(x_1q_{11} + x_2q_{12} + x_3q_{13})x_1 + (x_1q_{12} + x_2q_{22} + x_3q_{23})x_2 + (x_1q_{13} + x_2q_{23} + x_3q_{33})x_3 \right]$$

$$\therefore \frac{1}{2}q_{11}x_1^2 + \frac{1}{2}q_{22}x_2^2 + \frac{1}{2}q_{33}x_3^2 + q_{12}x_1x_2 + q_{13}x_1x_3 + q_{23}x_2x_3$$

$$Min\ f(x) = \frac{1}{2}x^T Qx + c^T x = \frac{1}{2}x^T \cdot \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{12} & q_{22} & q_{23} \\ q_{13} & q_{23} & q_{33} \end{bmatrix} \cdot x + [5, -4, 2] \cdot x$$

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{12} & q_{22} & q_{23} \\ q_{13} & q_{23} & q_{33} \end{bmatrix},\ A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix},\ c = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix},\ b = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

7-4-1- البرمجة الخطية التربيعية المقيدة بمساواة Equality−constrained quadratic programming :

شكلها العام يكون على النحو الاتي:

$$Min\ f(x) = \frac{1}{2}x^T Qx + c^T x ....(1)$$

$$ST\ \{ Ax = b........(2)$$

$$A(m \times n)\ ,\ b(m \times 1)\ ,\ x(n \times 1)\ , m \leq n$$

إذا كان عدد القيود (m) يساوي عدد المتغيرات (n) يتم تحديد المسألة بشكل فريد والحل الوحيد هو الجملة الخطية (2)، إذا كان عدد القيود أكبر من عدد المتغيرات $m \geq n$ فقد لا يكون للمسألة حل.

سيتم تطبيق طريقة مضاعف لاغرانج، ليكن λ شعاع لـ m مضاعفات لاغرانج Lagrange multipliers $\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m]^T$ ، اللاغرانجي Lagrangian لهذه المسألة يكون على النحو الاتي:

$$L(x,\lambda) = \frac{1}{2}x^T Qx + c^T x + \lambda^T (Ax - b) ....(3)$$

الشرط الضروري لكي يكون الشعاع x حلا لمسألة QP هو وجود شعاع λ بحيث تكون المشتقات الجزئية للاغرانجي بالنسبة لـ x و λ مساوية للصفر:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = Qx + c + A^T \lambda = 0..............(4)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = Ax - b = 0.........................(5)$$

المعادلات (4) و (5) نستطيع كتابتها على شكل جملة معادلات خطية:

$$\begin{cases} Qx + A^T \lambda = -c \\ Ax - 0 \cdot \lambda = b \end{cases} ....(6)$$

$$\therefore \begin{bmatrix} Q & A^T \\ A & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c \\ b \end{bmatrix} ....(7)$$

$$\therefore \begin{bmatrix} Q_{n\times n} & A^T_{n\times m} \\ A_{m\times n} & 0_{m\times m} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{n\times 1} \\ \lambda_{m\times 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_{n\times 1} \\ b_{m\times 1} \end{bmatrix} ....(8)$$

مثال 8:

حل المسألة التربيعية التالية:

$$Min\ f(x) = 5x^2 + 6y^2$$
$$ST = \{x + y = 8$$

حل المثال8:

يمكن كتابة دالة الهدف والقيد على الشكل المصفوفي العام، ويكون على النحو التالي:

$$f(x,y) = f(X) = \frac{1}{2} X^T \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 12 \end{bmatrix} X + [0,0]^T$$
$$[1,1] \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 8$$

يتم الحصول على الشرط الضروري للأَمْثَلة من الجملة الخطية (7) المعطاة بواسطة:

$$\begin{bmatrix} 10 & 0 & 1 \\ 0 & 12 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix}$$

والحلول تكون كالتالي:

$$x = \frac{48}{11}\ ,\ y = \frac{40}{11}\ ,\ \lambda = -\frac{480}{11}$$

الشرط الكافي للحد الأدنى تعطى بإشارة المحدد $(-1)^1 \begin{vmatrix} 10 & 0 & 1 \\ 0 & 12 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 22 > 0$ والتي

في هذا المثال تساوي 22.

فالنقطة $\left(x=\frac{48}{11}\ ,\ y=\frac{40}{11}\right)$ هي الحد الأدنى الوحيدة لدالة الهدف الخاضعة للقيد السابق لأن المحدد موجب ، والتي تساوي: $5\left(\frac{48}{11}\right)^2+6\left(\frac{40}{11}\right)^2=\frac{1920}{11}$.

التطبيق على برنامج Maple :

```
with(Student[MultivariateCalculus]) :
LagrangeMultipliers(5 x^2 + 6 y^2, [8 - x-y], [x, y], output = detailed)
```

$$\left[x=\frac{48}{11},\ y=\frac{40}{11},\ \lambda_1=-\frac{480}{11},\ 5x^2+6y^2=\frac{1920}{11}\right]$$

7-4-2- طريقة وولف المعدلة للسمبلكس Wolfe's[1] Modified Simplex Method

على الرغم من أن البرمجة التربيعية هي جزء من البرمجة غير الخطية ، إلا أن الإتمام لا يزال يعتمد على بعض طرق حل مسائل البرمجة الخطية ، أحد هذه الطرق هي طريقة Wolfe، بحيث تحول هذه الطريقة مسألة البرمجة التربيعية إلى مسألة برمجة خطية معدلة، حيث عدل وولف طريقة simplex لحل مسألة البرمجة التربيعية بإضافة شروط Karush–Kuhn–Tucker (KKT) وتغيير دالة الهدف للصيغ التربيعية إلى صيغة خطية.

لتكن المسألة التربيعية التالية:

[1] - فيليب ستار "فيل" وولف (1927- 2016) **Philip Starr "Phil" Wolfe** رياضياتي أمريكي وأحد مؤسسي نظرية الأمْثَلة المحدبة والبرمجة الرياضياتية.

$$Max\ Z = f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} c_{jk} x_j x_k$$

$$ST = \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_j \\ x_j \ge 0 \\ i = 1,2,.....,m \quad , \quad j = 1,2,.....,n \\ c_{jk} = c_{kj} \end{cases}$$

لكل: j ، k، $b_i \ge 0 \ (i = 1,2,.....,m)$ لذلك نفرض الصيغة التربيعية : $\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} c_{jk} x_j x_k$ مصفوفة شبه معرفة سالبة negative semi–definite .

ماهي المصفوفة المعرفة (موجبة / سالبة) ، الشبه المعرفة (موجبة / سالبة) ؟

لتكن $A_{n\times n}$ مصفوفة متماثلة ولتكن A_k مصفوفة فرعية من A، حيث: $\Delta_k = \det(A_k)$ ، لـ kth مصفوفة مصغرة minor فأن:

1- A مصفوفة معرفة موجبة إذا وفقط إذا كان : $\Delta_k > 0 \ (k = 1,2,....,n)$.

2- A مصفوفة معرفة سالبة إذا وفقط إذا كان :

$(-1)^k \Delta_k > 0 \ (k = 1,2,....,n)$.

3- A مصفوفة شبه معرفة موجبة إذا وفقط إذا كان :

$\Delta_k > 0 \ (k = 1,2,....,n-1)$ و $\Delta_n = 0$.

4- A مصفوفة شبه معرفة سالبة إذا وفقط إذا كان :

$(-1)^k \Delta_k > 0 \ (k = 1,2,....,n-1)$ و $\Delta_n = 0$.

من جهة أخرى إذا كانت A مصفوفة قطرية، حيث:

$$A = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_n \end{bmatrix},$$

1- A مصفوفة معرفة موجبة إذا وفقط إذا كان : $d_i > 0 \ (i = 1,2,....,n)$.

2- A مصفوفة معرفة سالبة إذا وفقط إذا كان : $d_i < 0 \ (i = 1,2,....,n)$.

3- A مصفوفة شبه معرفة موجبة إذا وفقط إذا كان :
$d_i \geq 0 \ (i = 1,2,....,n)$.

4- A مصفوفة شبه معرفة سالبة إذا وفقط إذا كان : $d_i \leq 0 \ (i = 1,2,....,n)$.

5- A مصفوفة غير معرفة إذا وفقط إذا كان : $d_i > 0 \ (i = 1,2,....,n)$ لبعض المؤشرات و $d_i < 0 \ (i = 1,2,....,n)$ للمؤشرات الأخرى.

مثال9:

لتكن: $f(x,y,z) = 2x^2 + 5y^2 + 4z^2 - 2xy + 4yz - 3xz$.

أوجد المصفوفة الهيسية وصغائرها ، ما طبيعة المصفوفة الهيسية من ناحية الأنواع المدروسة في الفقرة السابقة.

حل المثال9:

$$\nabla f(x,y,z) = (4x - 2y - 3z \ , \ 10y - 2x + 4z \ , \ 8z + 4y - 3x)$$

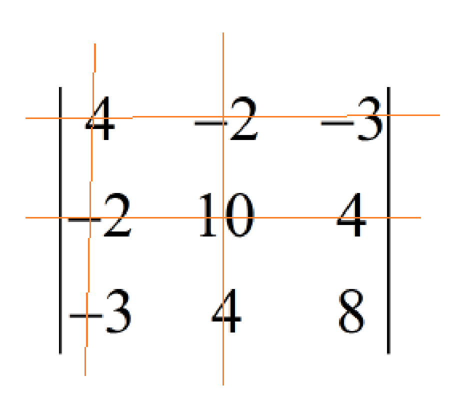
من خلال حل $\nabla f(x,y,z) = (0,0,0)$ ينتج الحل التافه $(0,0,0)$.

المصفوفة الهيسية :

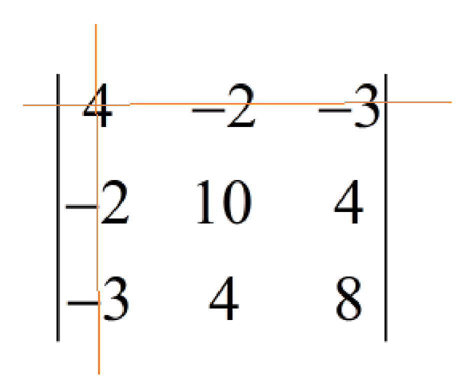
$$Hf(x,y,z) = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -3 \\ -2 & 10 & 4 \\ -3 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

أما صغائرها فهم كالتالي:

$n = 3 \ , \ k = 1 \ , \ n\text{-}k = 2$ علينا بحذف صفين وعمودين ، إذن: $\Delta_1 = 8$



$n=3\ ,\ k=2\ ,\ n\text{-}k=1$ علينا بحذف صف وعمود ، إذن: $\Delta_2 = 80-16=64$



$n=3\ ,\ k=3\ ,\ n\text{-}k=0$ لا نقوم بحذف لا صف و لا عمود ، إذن:

$\Delta_3 = \det(H) = 182$

من خلال $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ نستنتج أن : المصفوفة الهيسية هي مصفوفة معرفة موجبة ، ويترتب على ذلك أن النقطة الحرجة $(0,0,0)$ هي مصغر عام تام strict global minimizer للدالة $f(x,y,z)$.

لإنجاز طريقة وولف نتبع الخطوات التالية:

الخطوة 1:

تحويل المتباينات إلى مساواة، وذلك بإدراج متغيرات الفجوة (المكملة) q_i^2 في i^{th} قيد $(i=1,2,....,m)$ ، و r_j^2 في j^{th} قيد غير السالب $(j=1,2,....,n)$.

الخطوة 2:

تشكيل دالة لاغرانج:

$$L(x,q,r,\lambda,\mu)=f(x)-\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\left[\sum_{i=1}^{n}a_{ij}x_j-b_i+q_i^2\right]-\sum_{i=1}^{n}\mu_j\left[-x_j+r_j^2\right]$$

حيث:

$$x=(x_1,x_2,....,x_n)$$
$$q=(q_1^2,q_2^2,....,q_m^2)$$
$$r=(r_1^2,r_2^2,....,r_n^2)$$
$$\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,....,\lambda_m)$$
$$\mu=(\mu_1,\mu_2,....,\mu_n)$$

نقوم بالاشتقاق الجزئي الأول لدالة L بالنسبة لـ (x,q,r,λ,μ) والمساواة بالصفر، (اشتقاق شروط Kuhn−Tucker) من المعادلات الناتجة.

الخطوة 3:

وولف (1959) اقترح إدخال المتغير الاصطناعي غير السالب ν_j $(j=1,2,.....,n)$) في شروط Kuhn−Tucker.

$$c_j+\sum_{k=1}^{n}c_{jk}x_k-\sum_{i=1}^{m}a_{ij}\lambda_i+\mu_j=0$$

بعدها نقوم بتكوين دالة الهدف: $Z_\nu=\nu_1+\nu_2+......+\nu_n$.

الخطوة 4:

نحصل على الحل الأولي الأساسي المسموح به (الممكن) لمسألة البرمجة الخطية التالية:

$$Z_\nu = \min Z_\nu = \nu_1 + \nu_2 + ... + \nu_n$$

$$ST = \begin{cases} \sum_{k=1}^{n} c_{jk} x_k - \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\lambda_i + \mu_j + \nu_j = -c_j & (j = 1, 2, ..., n) \\ \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_j + q_i^2 = b_i & (i = 1, 2, ..., m) \\ \nu_j, \lambda_i, \mu_j, x_j \geq 0 & (i = 1, 2, ..., m), (j = 1, 2, ..., n) \end{cases}$$

ولاستيفاء شرط المتغيرات التكميلية فأن:

$$\sum_{j=1}^{n} \mu_j x_j + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i s_i = 0 \quad \left(s_i = q_i^2\right)$$

أو : $\lambda_i s_i = 0 \quad \wedge \quad \mu_j x_j = 0 \quad (i = 1, 2, ..., m), (j = 1, 2, ..., n)$

الخطوة 5:

نستخدم طريقة السمبلكس (خطوتين) لإيجاد الحل الأمثل للبرنامج الخطي للمعطى في الخطوة 4، يجب أن يفي الحل أعلاه المتغيرات المكملة.

الخطوة 6:

الحل الأمثل المعطى بواسطة الخطوة 5 هو الحل الأمثل للمسألة التربيعية.

مثال10:

لدينا مسألة التربيعية التالية:

$$Max\ f\left(x_1, x_2\right) = -2x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_2^2 + 8x_1 + 12x_2$$

$$ST \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

المطلوب:

إيجاد الحل الأمثل بطريقة Wolfe ؟

حل المثال10:

1) كتابة جميع القيود من الشكل $(\leq)$:

$$Max\ f(x_1,x_2)=-2x_1^2-2x_1x_2-2x_2^2+8x_1+12x_2$$

$$ST\begin{cases}x_1+2x_2\le 3\\ -x_1\le 0\ ,\ -x_2\le 0\end{cases}$$

2) ندرج متغيرات الفجوة (المكملة) $\left(q_1^2,r_1^2,r_2^2\right)$

$$Max\ f(x_1,x_2)=-2x_1^2-2x_1x_2-2x_2^2+8x_1+12x_2$$

$$ST\begin{cases}x_1+2x_2+q_1^2=3\\ -x_1+r_1^2=0\\ -x_2+r_2^2=0\end{cases}$$

للحصول على شروط kkt نقوم بتكوين دالة لاغرانج

$$L(x_1,x_2,\lambda_1,\mu_1,\mu_2,q_1,r_1,r_2)=-2x_1^2-2x_1x_2-2x_2^2+8x_1+12x_2-\lambda_1\left(x_1+2x_2+q_1^2-3\right)$$
$$-\mu_1\left(-x_1+r_1^2\right)-\mu_2\left(-x_2+r_2^2\right)$$

3) الشروط اللازمة والكافية لتحقيق الأمْثَلة تكون على النحو الاتي:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x_1}=-4x_1-2x_2+8-\lambda_1+\mu_1=0.............(1)\\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2}=-4x_2-2x_1+12-2\lambda_1+\mu_2=0.........(2)\end{cases}$$

نضع $\left(s_1=q_1^2\right)$ ولدينا $\mu_2x_2=0\ \wedge\ \mu_1x_1=0\ \wedge\ \lambda_1s_1=0$ وكذلك

$x_1+2x_2+s_1=3$ ، وفي الأخير لدينا: $x_1,x_2,\lambda_1,\mu_1,\mu_2\ge 0$.

4) ندرج المتغيرات الاصطناعية v_2,v_1 ، البرنامج الخطي المعدل يكون كالتالي:

$$Max\ Z_v=-v_1-v_2$$

$$ST=\begin{cases}4x_1+2x_2+\lambda_1-\mu_1=8\\ 4x_2+2x_1+2\lambda_1-\mu_2=12\\ x_1+2x_2+s_1=3\end{cases}$$

حيث أن كل المتغيرات غير سالبة و $\mu_2x_2=0\ \wedge\ \mu_1x_1=0\ \wedge\ \lambda_1s_1=0$.

نستخدم طريقة السمبلكس (طريقة المرحلتين):

		0	0	0	0	0	0	-1	-1	0
BV	CB	x_b	x_1	x_2	λ_1	μ_1	μ_2	v_1	v_2	s_1
v_1	-1	8	4	2	1	-1	0	1	0	0
v_2	-1	12	2	4	2	0	-1	0	1	0
s_1	0	3	1	2	0	0	0	0	0	1
	$Z_v = -20$		-6	-6	-3	1	1	0	0	0

نختار بين x_1 و x_2 وليكن x_2 هو المرشح للدخول (له أقل قيمة (-6)) (بمأن $\mu_2 = 0$ فبإمكان x_2 من الدخول ، عكس مثلا λ_1 إذ لا يمكنه الدخول لأن s_1 من متغيرات الأساس)، علينا إجراء اختبار النسبة لتحديد العنصر المحوري: $i = 3 \Leftarrow Min\left\{\frac{8}{2} = 4, \frac{12}{4} = 3, \frac{3}{2} = 1.5\right\}$ ، إذن x_2 يكون في موضع s_1 .

		0	0	0	0	0	0	-1	-1	0
BV	CB	x_b	x_1	x_2	λ_1	μ_1	μ_2	v_1	v_2	s_1
v_1	-1	5	3	0	1	-1	0	1	0	-1
v_2	-1	6	0	0	2	0	-1	0	1	-2
x_2	0	3/2	1/2	1	0	0	0	0	0	1/2
	$Z_v = -11$		-3	0	-3	1	1	0	0	0

بنفس الكيفية السابقة ، x_1 يكون في موضع v_1 (بمأن $\mu_1 = 0$ فبإمكان x_1 من الدخول)

		0	0	0	0	0	0	-1	-1	0
BV	CB	x_b	x_1	x_2	λ_1	μ_1	μ_2	v_1	v_2	s_1
x_1	0	5/3	1	0	1/3	-1/3	0	1/3	0	-1/3

v_2	-1	6	0	0	2	0	-1	0	1	-2
x_2	0	2/3	0	1	-1/6	-1/6	0	-1/6	0	2/3
	$Z_v = -6$		0	0	-2	0	-1	0	0	2

بنفس الكيفية السابقة ، λ_1 يكون في موضع v_2) بمأن $s_1 = 0$ فبإمكان λ_1 من الدخول)

		0	0	0	0	0	0	-1	-1	0
BV	**CB**	x_b	x_1	x_2	λ_1	μ_1	μ_2	v_1	v_2	s_1
x_1	0	2/3	1	0	0	1/3	-1/6	1/3	-1/6	0
λ_1	0	3	0	0	1	0	1/2	0	1/2	-1
x_2	0	7/6	0	1	0	-1/6	1/12	-1/6	1/12	1/2
	$Z_v = 0$		0	0	0	0	0	0	0	0

بمأن $Z_j - C_j \geq 0$ ، فالحل الأمثل يكون كالتالي: $\left(x_1 = \frac{2}{3}, x_2 = \frac{7}{6}, \lambda_1 = 3\right)$

القيمة المثلى للدالة f يتم الحصول عليها بتعويض قيمتي x_1 و x_2 في دالة الهدف الأصلية:

$$Max\ f(x_1, x_2) = -2\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 2\left(\frac{7}{6}\right)^2 - 2\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{7}{6}\right) + 8\left(\frac{2}{3}\right) + 12\left(\frac{7}{6}\right) = \frac{85}{6}$$

أما التطبيق على برنامج Maple فيكون كالتالي:

```
> with(Optimization) :
Use QPSolve to minimize a quadratic function of two variables subject to a linear constraint.
> QPSolve(-8 x - 12 y + 2 x^2 + 2 x y + 2 y^2, {x + 2 y <= 3})
        [-14.1666666666667, [x = 0.666666666666667, y = 1.16666666666667]]
```

تطبيق3:

نريد تعظيم دالة المنفعة لمستهلك ما والتي تعطى كما يلي:

$Max:\ U\left(x_1,x_2\right)=-x_1^2-2x_1x_2-4x_2^2+4x_1+6x_2$ ، ومعالم الدخل كانت كما يلي:

$P_{x_1}=10\ ,\ P_{x_2}=10\ ,\ R=200$ ، في ظل القيد : $10x_1+4x_2\leq 200$.

P_{x_1} : سعر السلعة x_1 ، P_{x_2} : سعر السلعة x_2 ، R : دخل المستهلك.

ملاحظة: السلعتين قابلتين للتجزئة.

المطلوب:

إيجاد الحل الأمثل بطريقة Wolfe ؟ :

حل التطبيق3:

$$Max:\ U\left(x_1,x_2\right)=-x_1^2-2x_1x_2-4x_2^2+4x_1+6x_2$$

$$ST\begin{cases}10x_1+4x_2\leq 200\\ x_1,x_2\geq 0\end{cases}$$

1) كتابة جميع القيود من الشكل $(\leq)$:

$$Max\ f\left(x_1,x_2\right)=-x_1^2-2x_1x_2-4x_2^2+4x_1+6x_2$$

$$ST\begin{cases}10x_1+4x_2\leq 200\\ -x_1\leq 0\ ,\ -x_2\leq 0\end{cases}$$

2) ندرج متغيرات الفجوة (المكملة) $\left(q_1^2,r_1^2,r_2^2\right)$

$$Max\ f\left(x_1,x_2\right)=-x_1^2-2x_1x_2-4x_2^2+4x_1+6x_2$$

$$ST\begin{cases}10x_1+4x_2+q_1^2=200\\ -x_1+r_1^2=0\\ -x_2+r_2^2=0\end{cases}$$

للحصول على شروط kkt نقوم بتكوين دالة لاغرانج

$$L(x_1,x_2,\lambda_1,\mu_1,\mu_2,q_1,r_1,r_2)=-x_1^2-2x_1x_2-4x_2^2+4x_1+6x_2-\lambda_1\left(10x_1+4x_2+q_1^2-200\right)$$
$$-\mu_1\left(-x_1+r_1^2\right)-\mu_2\left(-x_2+r_2^2\right)$$

3) الشروط اللازمة والكافية لتحقيق الأمْثَلة تكون على النحو الاتي:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x_1}=-2x_1-2x_2+4-10\lambda_1+\mu_1=0.............(1)\\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2}=-8x_2-2x_1+6-4\lambda_1+\mu_2=0.........(2)\end{cases}$$

نضع $(s_1=q_1^2)$ ولدينا $\mu_2x_2=0 \;\wedge\; \mu_1x_1=0 \;\wedge\; \lambda_1s_1=0$ وكذلك

$10x_1+4x_2+s_1=200$، وفي الأخير لدينا: $x_1,x_2,\lambda_1,\mu_1,\mu_2\geq 0$.

4) ندرج المتغيرات الاصطناعية v_2,v_1 البرنامج الخطي المعدل يكون كالتالي:

$$Max\ Z_v=-v_1-v_2$$
$$ST=\begin{cases}2x_1+2x_2+10\lambda_1-\mu_1=4\\ 8x_2+2x_1+4\lambda_1-\mu_2=6\\ 10x_1+4x_2+s_1=200\end{cases}$$

حيث أن كل المتغيرات غير سالبة و $\mu_2x_2=0 \;\wedge\; \mu_1x_1=0 \;\wedge\; \lambda_1s_1=0$.

نستخدم طريقة السمبلكس (طريقة المرحلتين):

		0	0	0	0	0	0	-1	-1	0
BV	**CB**	x_b	x_1	x_2	λ_1	μ_1	μ_2	v_1	v_2	s_1
v_1	-1	4	2	2	10	-1	0	1	0	0
v_2	-1	6	2	8	4	0	-1	0	1	0
s_1	0	200	10	4	0	0	0	0	0	1
	$Z_v=-10$		-4	-10	-14	1	1	0	0	0

بمأن $\mu_2 = 0$ فبإمكان x_2 من الدخول ، x_2 هو المرشح للدخول (له أقل قيمة (-10)) ، λ_1 لا يمكنه الدخول لأن s_1 من متغيرات الأساس ، علينا إجراء اختبار النسبة لتحديد العنصر المحوري: $Min\left\{\frac{4}{2},\frac{6}{8},\frac{200}{4}\right\} \Rightarrow i=2$ ، إذن x_2 يكون في موضع v_2 .

		0	0	0	0	0	0	-1	-1	0
BV	**CB**	x_b	x_1	x_2	λ_1	μ_1	μ_2	v_1	v_2	s_1
v_1	-1	5/2	3/2	0	9	-1	1/4	1	-1/4	0
x_2	0	3/4	1/4	1	1/2	0	-1/8	0	1/8	0
s_1	0	197	9	0	-2	0	1/2	0	-1/2	1
	$Z_v = -5/2$		-3/2	0	-9	1	-1/4	0	5/4	0

بنفس الكيفية السابقة ، بمأن $\mu_1 = 0$ فبإمكان x_1 من الدخول ، x_1 يكون في موضع v_1 .

		0	0	0	0	0	0	-1	-1	0
BV	**CB**	x_b	x_1	x_2	λ_1	μ_1	μ_2	v_1	v_2	s_1
x_1	0	5/3	1	0	6	-2/3	1/6	2/3	-1/6	0
x_2	0	1/3	0	1	-1	1/6	-1/6	-1/6	1/6	0
s_1	0	182	0	0	-56	6	-1	-6	1	0
	$Z_v = 0$		0	0	0	0	0	1	1	0

بمأن $Z_j - C_j \geq 0$ ، فالحل الأمثل يكون كالتالي: $\left(x_1 = \frac{5}{3}, x_2 = \frac{1}{3}\right)$

القيمة المثلى للدالة f يتم الحصول عليها بتعويض قيمتي x_1 و x_2 في دالة الهدف الأصلية:

$$Max\ f(x_1, x_2) = -\left(\frac{5}{3}\right)^2 - 4\left(\frac{1}{3}\right)^2 - 2\left(\frac{5}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right) + 4\left(\frac{5}{3}\right) + 6\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{13}{3}$$

أما التطبيق على برنامج Maple فيكون كالتالي:

```
> with(Optimization) :
Use QPSolve to minimize a quadratic function of two variables subject to a linear constraint.
> QPSolve( x1^2 + 2 x1 x2 + 4 x2^2 - 4 x1 - 6 x2, {200 ≥ 10 x1 + 4 x2})
      [-4.33333333333333, [x1 = 1.66666666666667, x2 = 0.333333333333333]]
```

7-5- أنواع أخرى من البرمجة غير الخطية:

هناك أنواع أخرى من البرمجة غير الخطية نذكر فيها على عجالة نوعين : البرمجة المحدبة و البرمجة القابلة للفصل ، ويمكن للقارئ أن يتوسع في البحث عن الأنواع الأخرى، وكل نوع له تطبيقاته في الاقتصاد أو الهندسة أو أي ميدان يهتم بالأَمْثَلة، مثلا هناك: البرمجة غير المحدبة Nonconvex Programming ، البرمجة الهندسية Geometric Programming ، البرمجة الكسرية Fractional Programming .

7-5-1- البرمجة المحدبة Convex Programming :

تغطي البرمجة المحدبة جزء كبير من المسائل التي تشمل في الواقع كحالات خاصة من البرمجة غير الخطية عندما تكون f دالة مقعرة concave function ، فرضيات هذا النوع هي كما يلي:

1- f دالة مقعرة.

2- g_i دالة محدبة.

فرضيات هذا النوع كافية لضمان أن يكون الحد الأقصى المحلي هو الحد الأقصى العام، الحل الأمثل لهذا النوع يعالج بنفس الكيفية لحل مسائل البرمجة غير الخطية المذكورة سابقا، وهي تعميم طبيعي للشروط المعطاة للتحسين غير المقيد وامتداده ليشمل قيود عدم السالبية.

7-5-2- البرمجة القابلة للفصل Separable Programming :

هي حالة خاصة من البرمجة المحدبة، نضيف إليها فرضية ثالثة وهي أن كل من الدالة f والدالة g_i قابلة للفصل، أي: $f(x)=\sum_{j=1}^{n} f_j(x_j)$.

$$f(x_1,x_2)=25x_1-5x_1^2+8x_2-10x_2^2$$
$$f_1(x_1)=25x_1-5x_1^2 \quad , \quad f_2(x_2)=8x_2-10x_2^2$$

كل منها دالة لمتغير واحد x_1 و x_2 على التوالي.

الأعلام المذكورة في الفصل السابع:



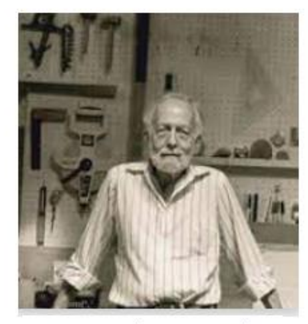
لودفيغ أوتو هيسه
Ludwig Otto Hesse
(1811 – 1874)



كارل هيرمان أماندوس شفارز
Karl Hermann Amandus Schwarz
(1921 -1843)



جوزيف لويس كونت دي لاغرانج
Joseph Louis de Lagrange
(1813 - 1736)



فيليب ستار "فيل" وولف
Philip Starr "Phil" Wolfe
(2016 -1927)

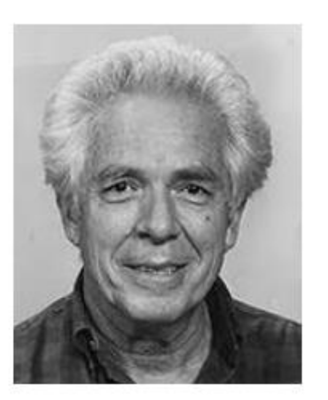


ألبرت ويليام تاكر
Albert William Tucker
1905 - 1995




بول دوغلاس
Paul Howard Douglas
(1892- 1976)

تشارلز كوب
Charles Wiggins Cobb
(1875–1949)




هارولد ويليام كون
Harold William Kuhn
1925 – 2014

ويليام كاروش
William Karush
(1997 - 1917)

الفصل الثامن : البرمجة الديناميكية DYNAMIC PROGRAMMING

تمهيد:

البرمجة الديناميكية هي نهج أمثل يحول مسألة معقدة إلى مسائل بسيطة متسلسلة، السمة الأساسية لها هي الطبيعة المتعددة المراحل لإجراء التحسين حيث تعتبر من بين أفضل الطرق التحسين، حيث توفر البرمجة الديناميكية إطارا عاما لتحليل العديد من أنواع المسائل في هذا الإطار.

تم تقديم هذا المفهوم في أوائل الخمسينيات من القرن الماضي بواسطة ريتشارد بيلمان Richard E. Bellman [1]، حيث في ذلك الوقت كان مصطلح "البرمجة" يعني التخطيط والجدولة ، تتكون البرمجة الديناميكية من حل مسألة عن طريق تحليلها إلى مسائل فرعية ، ثم حل المسائل الفرعية من الأصغر إلى الأكبر عن طريق تخزين النتائج الوسيطة، كانت ناجحة للغاية عند تطبيقها على الفور لأن العديد من الدوال الاقتصادية في الصناعة تعتبر من هذا النوع مثل تحسين العمليات الكيميائية و إدارة المخزونات.

8-1- تصميم وتحليل البرمجة الديناميكية:

تستخدم البرمجة الديناميكية التحسين على غرار طرق أخرى مثل طريقة التقسيم والسيطرة divide–and–conquer method، تحل البرمجة الديناميكية المسائل من خلال الجمع بين حلول المسائل الفرعية، علاوة على ذلك تحل خوارزمية البرمجة الديناميكية كل مسألة فرعية مرة واحدة فقط ثم تحفظ إجابتها في جدول ، وبالتالي تتجنب إعادة حساب الإجابة في كل مرة.

[1] - **ريتشارد إرنست بيلمان (1920- 1984) Richard Ernest Bellman** رياضياتي أمريكي ، أبتكر البرمجة الديناميكية في سنة 1953 وقدم مساهمات مهمة في مجالات أخرى من الرياضيات مثل الرياضيات الحيوية، أسس المجلة الرائدة في مجال الرياضيات الحيوية Mathematical Biosciences.

8-1-1- الهيكل الفرعي الأمثل:

نقول عن مسألة معينة لها خاصية البنية المثلى إذا كان من الممكن الحصول على الحل الأمثل للمسألة المحددة باستخدام الحلول المثلى لمسائلها الفرعية، على سبيل المثال تحتوي مسألة أقصر مسار على خاصية البنية المثلى التالية :

إذا كانت العقدة x تقع في أقصر مسار من عقدة المصدر u نحو الوجهة v، فإن أقصر مسار من u إلى v هو مزيج من أقصر مسار من u إلى x، وأقصر مسار من x إلى v.

8-1-2- خطوات منهج البرمجة الديناميكية:

تم تصميم خوارزمية البرمجة الديناميكية باستخدام الخطوات الأربع التالية:

- وصف هيكل الحل الأمثل.
- تحديد قيمة الحل الأمثل بشكل متكرر.
- حساب قيمة الحل الأمثل عادة بطريقة تصاعدية.
- بناء الحل الأمثل من المعلومات المحسوبة.

8-1-3- مصطلحات أساسية:

فيما يلي المصطلحات المستخدمة بشكل شائع في البرمجة الديناميكية:

أولا : المرحلة Stage: تُعرف النقطة التي يتم فيها اتخاذ القرار بالمرحلة، حيث تمثل نهاية المرحلة بداية المرحلة التالية المباشرة، على سبيل المثال: في مسألة تخصيص الباعة: تمثل كل منطقة مرحلة، في مسألة أقصر طريق: تمثل كل مدينة مرحلة.

ثانيا: الحالة State: المتغير الذي يربط مرحلتين في مسألة قرار متعدد المراحل يسمى متغير الحالة، في أي مرحلة تصف القيم التي يمكن أن تتخذها المتغيرات حالة المسألة ، يشار إلى هذه القيم على أنها حالات، على سبيل المثال: في مسألة أقصر طريق، يشار إلى المدينة على أنها متغير الحالة.

ثالثا: مبدأ الأمْثَلَة Principle of optimality : ينص مبدأ الأمثلية على أن القرار الأمثل من أي حالة في مرحلة ما حتى النهاية مستقل عن كيفية الوصول إلى ذلك حقيقيا.

رابعا : السياسة المثلىOptimal policy : السياسة التي تعمل على تحسين قيمة دالة الهدف تسمى السياسة المثلى.

خامسا: مبدأ بيلمان للأمثلة Bellman's principle of optimality : ينص على أن " السياسة المثلى (سلسلة من القرارات) لها خاصية أنه مهما كانت الحالة والقرارات الأولية ، يجب أن تشكل قرارات إعادة التعميم سياسة مثلى فيما يتعلق بالحالة الناتجة عن القرار الأول".

سادسا : دالة العائد Return function : في كل مرحلة يتم اتخاذ قرار يمكن أن يؤثر على حالة النظام في المرحلة التالية ويساعد في الوصول إلى الحل الأمثل في المرحلة الحالية ، كل قرار له مزاياه التي يمكن تمثيلها في شكل معادلة جبرية، هذه المعادلة تسمى دالة العائد.

8-2- خصائص البرمجة الديناميكية Characteristics of Dynamic Programming:

الميزات الأساسية التي تميز مسألة البرمجة الديناميكية هي كما يلي:

(أ) يمكن تقسيم المسألة إلى مراحل مع وجود قرار مطلوب في كل مرحلة، المرحلة هي جهاز لتسلسل القرارات، أي أنه يتم تحليل المسألة إلى مسائل فرعية بحيث يمكن الحصول على الحل الأمثل للمسألة من الحلول المثلى للمسائل الفرعية.

(ب) تتكون كل مرحلة من عدد من الحالات المرتبطة بها.

(ج) القرار في كل مرحلة يحول المرحلة الحالية إلى حالة مرتبطة بالمرحلة التالية.

(د) توصف حالة النظام في مرحلة ما بمجموعة من المتغيرات تسمى متغيرات الحالة.

(ه) عندما تُعرف الحالة الحالية ، تكون السياسة المثلى للمراحل المتبقية مستقلة عن سياسة المراحل السابقة.

(و) لتحديد السياسة المثلى لكل حالة من حالات النظام ، تتم صياغة معادلة تكرارية مع عدد n من المراحل المتبقية ، بالنظر إلى السياسة المثلى لكل حالة مع (n−1) من المراحل المتبقية.

(ز) باستخدام نهج المعادلة التراجعية في كل مرة ، يتحرك إجراء الحل إلى الخلف بمرحلة تلو الأخرى للحصول على السياسة المثلى لكل حالة لتلك المرحلة بالذات ، حتى يصل إلى السياسة المثلى .

8-2-1- نموذج البرمجة الديناميكية 1 Dynamic Programming Model

قيد جمعي واحد مع عائد جدائي قابل للفصل.

نعتبر المسألة التالية:

$$MaxZ = \prod_{j=1}^{n} f_j\left(x_j\right)$$

$$ST\begin{cases}\sum_{j=1}^{n} a_j x_j = b \\ x_j \geq 0 \quad , \quad a_j \geq 0\end{cases}$$

ندرج متغيرات الحالة:

$$S_j = \sum_{j=1}^{n} a_j x_j = b$$

$$S_{j-1} = S_j - a_j x_j \quad , \quad j = 2,3,.....,n$$

ليكن: $F_j\left(S_j\right) = \max_{x_1,x_2,....,x_j} \prod_{1}^{j} f_j\left(x_j\right)$ ، يتم إعطاء صيغة التراجعية العامة بواسطة :

$$F_j\left(S_j\right) = \max_{x_1,x_2,....,x_j} \prod_{1}^{j} f_j\left(x_j\right)$$

$$F_j\left(S_j\right) = \max_{x_j}\left[f_j\left(x_j\right)F_{j-1}\left(S_{j-1}\right)\right]$$

$$j = n \quad , \quad n-1,.....,2$$

حيث: $F_1\left(S_1\right) = f_1\left(x_1\right)$

مثال1:

$$Max\ Z = x_1^2 x_2^2 x_3^2$$

$$ST \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

حل المثال1:

ندرج متغيرات الحالة:

$$S_3 = x_1 + x_2 + x_3$$
$$S_2 = S_3 - x_3 = x_1 + x_2$$
$$S_1 = S_2 - x_2 = x_1$$
$$F_j(S_j) = \max_{x_1, x_2, \ldots, x_j} \prod_1^j f_j(x_j) \quad ;$$
$$F_3(S_3) = \max_{x_3} \left[x_3^2 F_2(S_2) \right]$$
$$F_2(S_2) = \max_{x_2} \left[x_2^2 F_1(S_1) \right]$$
$$F_1(S_1) = x_1^2 = (S_2 - x_2)^2$$

لذلك:

$$F_2(S_2) = \max_{x_2} \left[x_2^2 (S_2 - x_2)^2 \right]$$

نستخدم حساب التفاضل لتعظيم : $x_2^2 (S_2 - x_2)^2$ ، والحصول على القيمة المثلى لـ x_2 ،

حيث : $x_2 = \frac{S_2}{2}$ ، بعدها نستخدم مبدأ بيلمان للأمثلة :

$$F_3(S_3) = \max_{x_3} \left[x_3^2 \frac{S_2^4}{16} \right]$$
$$= \max_{x_3} \left[\frac{x_3^2}{16} (S_3 - x_3)^4 \right]$$

نستخدم حساب التفاضل مرة أخرى حيث نجد: $x_3 = \frac{S_3}{3} = \frac{6}{3} = 2$

$$S_2 = x_1 + x_2 = 6 - 2 = 4$$

$$x_2 = \left(\frac{4}{2}\right) = 2 \quad , \quad S_1 = S_2 - x_2 = 2 = x_1$$

$$Max\ Z = x_1^2 x_2^2 x_3^2 = 64$$

8-2-2- نموذج البرمجة الديناميكية 2 Dynamic Programming Model

قيد جمعي واحد مع عائد جمعي قابل للفصل.

نعتبر المسألة التي تكون فيها دالة الهدف أو دالة العائد z دالة قابلة للفصل بشكل جمعي لمتغيرات n و x_j ، و $f_j\left(x_j\right)$ دالة لـ x_j ، سنحاول ايجاد : x_j ، حيث : $1 \le j \le n$:

$$MinZ = \sum_{j=1}^{n} f_j\left(x_j\right)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \ge b$$

$$a_j\left(\ge 0\right) \quad , \quad b\left(> 0\right) \in \Re$$

$$x_j \ge 0 \quad , \quad 1,2,.....,n$$

هذه مسألة n– المرحلة حيث تشير اللاحقة j إلى المرحلة، حيث x_j قيم سيتم تحديدها، x_j تدعى بمتغيرات القرار، العائد في المرحلة jth هو $f_j\left(x_j\right)$ ، وهكذا كل قرار x_j يرتبط بالعائد $f_j\left(x_j\right)$.

ندرج متغيرات الحالة: $S_1, S_2, ..., S_n$

$$S_n = a_1 x_1 + a_2 x_2 + ... + a_n x_n \ge b$$

$$S_{n-1} = a_1 x_1 + a_2 x_2 + ... + a_{n-1} x_{n-1} = S_n - a_n x_n$$

$$S_{n-2} = a_1 x_1 + a_2 x_2 + ... + a_{n-2} x_{n-2} = S_{n-1} - a_{n-1} x_{n-1}$$

....

$$S_1 = a_1 x_1 = S_2 - a_2 x_2$$

ليكن: $2 \le j \le n$, $S_{j-1} = T_j\left(S_j, x_j\right)$ ، حيث : T_j هي دالة تحول المرحلة ،
$F_n(S_n)$ تشير إلى الحد الأدنى لقيمة z لأي قيمة مجدية (مسموح بها) لـ S_n، كون S_n دالة لجميع متغيرات القرار، فأن :

$$F_n(S_n) = \min_{x_1, x_2, \ldots, x_n}\left[f_1(x_1) + f_2(x_2) + \ldots + f_n(x_n)\right] \ , \ S_n \ge b$$

إذا اخترنا قيمة معينة لـ x_n ، وقللنا من قيمة z على n−1 متغيرات المتبقية، فعندئذ يكون لدينا:

$$F_n(S_n) = f_n(x_n) + \min_{x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}}\left[\sum_{j=1}^{n-1} f_j(x_j)\right] = f_n(x_n) + F_{n-1}(S_{n-1})$$

لذلك فإن الحد الأدنى على كل x_n لأي S_n ممكنة، يتم الحصول عليها من خلال:

$$F_n(S_n) = \min_{x_n}\left[f_n(x_n) + F_{n-1}(S_{n-1})\right]$$

إذا كانت قيمة $F_{n-1}(S_{n-1})$ معلومة على كل x_n ، فإن الدالة التي سيتم تدنيتها تتضمن متغيرا واحدا فقط x_n ، الصيغة التراجعية هي:

$$F_j(S_j) = \min_{x_j}\left[f_j(x_j) + F_{j-1}(S_{j-1})\right] \quad ; \quad 2 \le j \le n$$

$$F_1(S_1) = f_1(x_1)$$

بدءا من الأن نقوم بالتحسين بشكل متكرر للحصول على $F_2(S_2), F_3(S_3), \ldots$ وأخيرا نحصل على $F_n(S_n)$ لكل S_n ممكنة،

في كل مرة يتم إجراء التحسين على متغير واحد فقط.

مثال2:

$$MinZ = x_1^2 + 5x_2^2 + 6x_3^2$$

$$ST\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 41 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

حل المثال2:

هنا متغيرات القرار x_1, x_2, x_3 نحدد متغيرات الحالة، حيث:

$$S_3 = x_1 + x_2 + x_3 = 41$$
$$S_2 = x_1 + x_2 = S_3 - x_3$$
$$S_1 = x_1 = S_2 - x_2$$

أيضا نحدد $F_j(S_j) = \min_{x_j}\left[f_j(x_j) + F_{j-1}(S_{j-1})\right]$ لكل $j = 2,3$ و $F_1(S_1) = f_1(x_1)$

فأنه لدينا:

$$F_3(S_3) = \min_{x_3}\left[6x_3^2 + F_2(S_2)\right]$$
$$F_2(S_2) = \min_{x_2}\left[5x_2^2 + F_1(S_1)\right]$$
$$F_1(S_1) = x_1^2 = (S_2 - x_2)^2$$

وهكذا : $F_2(S_2) = \min_{x_2}\left[5x_2^2 + (S_2 - x_2)^2\right]$ ، باستخدام حساب التفاضل والتكامل والحصول على القيمة المثلى لـ x_2 ، حيث: $x_2 = \frac{S_2}{6}$ ، بعدها نستخدم مبدأ بيلمان للأمثلة ، حيث: $F_2(S_2) = \frac{5S_2^2}{6}$.

$$F_3(S_3) = \min_{x_3}\left[6x_3^2 + F_2(S_2)\right]$$
$$= \min_{x_3}\left[6x_3^2 + \frac{5(S_3 - x_3)^2}{6}\right]$$

نستخدم حساب التفاضل مرة أخرى حيث نجد:

$$x_3 = \frac{5S_3}{41} = \frac{5(41)}{41} = 5$$
$$S_2 = S_3 - x_3 = 41 - 5 = 36$$
$$x_2 = \frac{S_2}{6} = \frac{36}{6} = 6$$
$$S_1 = S_2 - x_2 = 36 - 6 = 30 = x_1$$

وبالتالي $MinZ = x_1^2 + 5x_2^2 + 6x_3^2 = 1230$.

ملاحظة:

لإثبات أن الدالة تبلغ نهايتها (العظمى / الصغرى)، وجب دراسة (تقعر / تحدب) الدالة:

نهاية عظمى (دالة مقعرة): $f = g''(Q_0) < 0$.

نهاية صغرى (دالة محدبة): $f = g''(Q_0) > 0$.

3-8- مسألة أقصر طريق Shortest Path Problem :

في نظرية الرسم البياني، تتمثل مسألة أقصر طريق في إيجاد مسار بين رأسين (أو عقدتين) بحيث يتم تدنية مجموع أوزان حوافها المكونة، مثال على ذلك هو إيجاد أسرع طريقة للانتقال من موقع إلى أخر على خريطة الطريق ، في هذه الحالة تمثل الرؤوس المواقع وتمثل الحواف أجزاء من الطريق ويتم ترجيحها بالزمن اللازم للتنقل في هذا الجزء، هذه المسألة لها تطبيقات عديدة، نذكر منها:

- في الاقتصاد (اتخاذ القرار المتسلسل ، وتحليل الشبكات وما إلى ذلك).
- الروبوتات والذكاء الاصطناعي.
- تصميم شبكات الاتصالات السلكية واللاسلكية وتوجيهها.
- خرائط قوقل Google Maps .
- حزم التوجيه على الإنترنت.

وتوفر كذلك هذه المسألة مقدمة لطيفة لمنطق البرمجة الديناميكية.

نبدأ بتوضيح عن كيفية تطبيق البرمجة الديناميكية في هذه المسألة:

نعتبر $G = (V, A)$ رسم بياني موجه، حيث V مجموعة منتهية من (العقد / الرؤوس) أو الحالات المحتملة عند كل مرحلة و $A \subseteq V \times V$ هي مجموعة (الأقواس / الحواف) .

- تكلفة كل انتقال $c : A \to \mathbb{R}$ هي دالة لـ A التي نحصل منها على قيمة الدوال.
- المسار : سلسلة من الرؤوس $v_0, v_1, ..., v_k$ تحت قيد $(v_{i-1}, v_i) \in A$ مع $1, ..., k$.

- الطول / وزن المسار : $c(P)=\sum_{i=1}^{k} c(v_{i-1},v_i)$.
- دورة: مسار : $v_0,v_1,......,v_k$ مع $v_0=v_k$.

أما عن خطوات معادلات بيلمان الخلفية فنوجزها ما يلي:

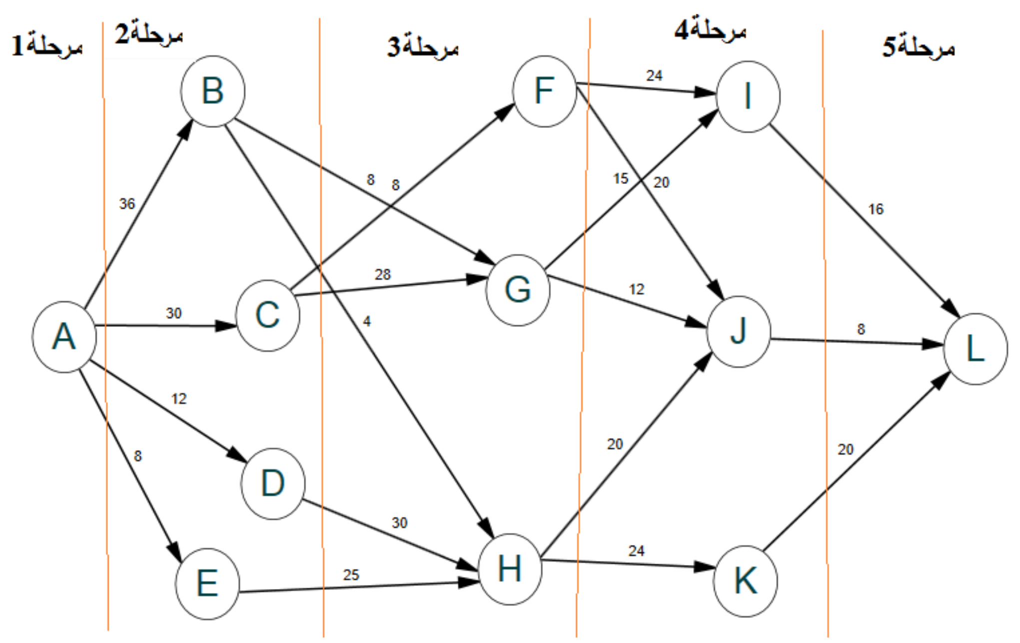
- نفرض أن G ليس لديها دورات ذات أطوال سالبة.
- لتكن f_i قيمة الدالة عند الحالة i.
- قيمة الدالة عند أخر حالة هي 0 أي $f_{Last-state}=0$.
- $f_i=\min_x\left[c_{ix}+f_j\right]\ ,\ i<j$
- إذا كانت t هي الحالة المحددة فأن: $f_t(i)=\min_x\left[c_{ix}+f_{t+1}(j)\right]\ ,\ \forall i$.
- نتوقف عند الوصول إلى حالة البداية.

هذه هي معادلة العائد لـ DP يمكن حلها عن طريق إجراء تراجعي، بحث يبدأ من المرحلة النهائية ويتوقف في المرحلة الأولية، علما أنه توجد طريقة أمامية.

تتمثل مسألة أقصر طريق في العثور على كيفية اجتياز رسم بياني من عقدة محددة إلى أخرى بأقل تكلفة.

تطبيق 1:

لنأخذ الرسم البياني التالي:



نرغب في السفر من العقدة (الرأس) (المدينة) A إلى العقدة L بأقل تكلفة.

تشير الأسهم (الحواف) إلى الحركات التي يمكننا القيام بها.

تشير الأرقام الموجودة على الحواف إلى تكلفة الانتقال بوحدة نقدية.

المطلوب:

ما هو المسار الأقل تكلفة (الأمثل) ؟

حل التطبيق1:

أولا: نتبع الخطوات المذكورة سابقا:

$$f_L = 0$$

$$f_K = \min[c_{KL} + f_L] = 20$$

$$f_J = \min[c_{JL} + f_L] = 8$$

$$f_I = \min[c_{IL} + f_L] = 16$$

$$f_H = \min[c_{HK} + f_K \ , f_{HJ} + f_J] = \min[24+20 \ , \ 20+8] = 28$$

$$f_G = \min[c_{GJ} + f_J \ , f_{GI} + f_I] = \min[12+8 \ , \ 15+16] = 20$$

$$f_F = \min[c_{FJ} + f_J \ , f_{FI} + f_I] = \min[20+8 \ , \ 24+16] = 28$$

$$f_E = \min[c_{EH} + f_H] = \min[25+28] = 53$$

$$f_D = \min[c_{DH} + f_H] = \min[30+28] = 58$$

$$f_C = \min[c_{CG} + f_G \ , f_{CF} + f_F] = \min[28+20 \ , \ 8+28] = 36$$

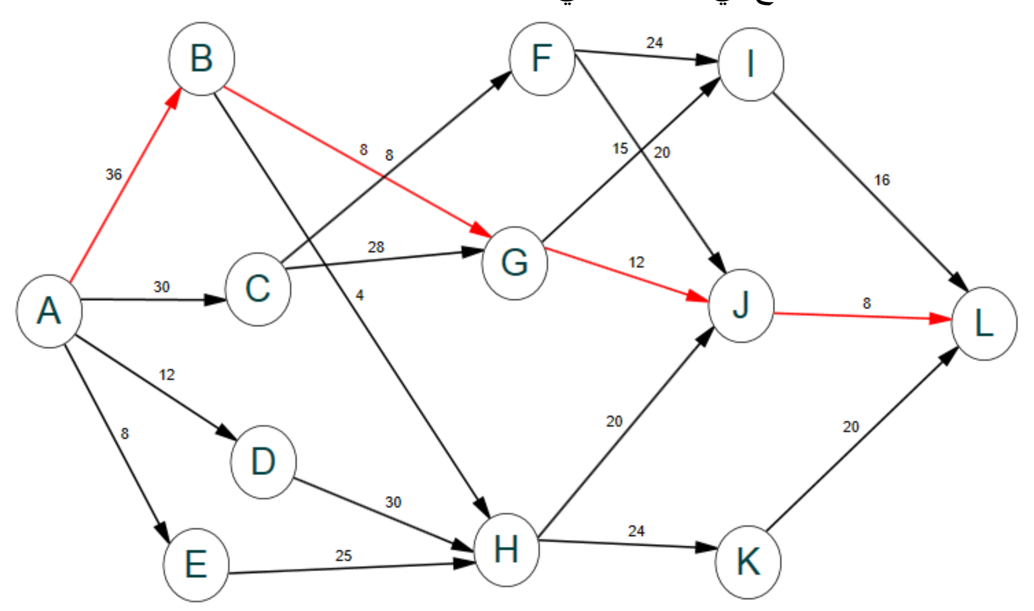
$$f_B = \min[c_{BH} + f_H \ , f_{BG} + f_G] = \min[4+28 \ , \ 8+20] = 28$$

$$f_A = \min[c_{AB} + f_B \ , f_{AC} + f_C \ , c_{AD} + f_D \ , f_{AE} + f_E]$$
$$= \min[36+28, 30+36, 12+58, 8+53] = 61$$

ثانيا: نبحث عن أقل تكلفة في كل مرحلة، نلخصها في الجدول التالي:

المرحلة 5	المرحلة 4	المرحلة 3	المرحلة 2	المرحلة 1
L	J	G	B	A
0	8	20	28	61

المسار الأمثل الذي يحقق أقل تكلفة هو: $A \to B \to G \to J \to L$ ، بتكلفة تقدر بـ 61 وحدة نقدية، موضح في الشكل التالي:



8-4- مسألة حقيبة الظهر Knapsack Problem :

نفرض أننا نخطط لرحلة مشي لمسافات طويلة، ولذلك فنحن مهتمون بملء الحقيبة بالأشياء التي تعتبر ضرورية للرحلة، هناك أنواع مختلفة من العناصر تعتبر مرغوبة، يمكن أن تشمل قارورة ماء وتفاح وبرتقال وساندويتش وما إلى ذلك، يحتوي كل نوع عنصر على مجموعة معينة من سمتين ، وهما الوزن (أو الحجم) والقيمة التي تحدد مستوى الأهمية المرتبط بكل وحدة من هذا النوع من العناصر.

تطبيق2:

نظرا لأن الحقيبة ذات سعة محدودة من حيث الوزن (أو الحجم) ، فإن مسألة الاهتمام هي معرفة كيفية تحميل الحقيبة بمجموعة من الوحدات من الأنواع المحددة من العناصر التي تنتج أكبر قيمة إجمالية من الأشياء الموصوفة سابقا أمرا في بالغ الأهمية، يمكننا حمل 10 كلغ في الحقيبة ، الأربع عناصر المحتمل حملها يتم إعطاء وزنها وقيم فائدتها في الجدول التالي:

البنود (I)	الوزن (كلغ) w_i	الأهمية (القيمة) v_i
1 قارورة ماء	5	8
2 برتقال	3	6
3 تفاح	2	4
4 ساندويتش	2	5

ليكن x_1 يرمز لقارورة الماء، x_2 : البرتقال، x_3 : التفاح، x_4 : ساندويتش.

w_i = وزن كل عنصر من النوع i، بالنسبة إلى $i = 1, 2, \ldots\ldots, n$ (هنا n=4).

v_i = القيمة المرتبطة بكل عنصر من النوع i، من أجل $i = 1, 2, \ldots\ldots, n$

W = سعة وزن الحقيبة (هنا W= 10 kg).

بعد ذلك، يمكن صياغة مسألتنا على أنها مسألة تعظيم:

$$MaxZ = 8x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 5x_4$$

$$ST: \sum_{i=1}^{4} w_i \cdot v_i \leq 10$$

x_1, x_2, x_3, x_4 متغيرات قرار غير سالبة، محددة بواسطة x_i = عدد العناصر من النوع i التي يتم تحميلها في الحقيبة.

نظرا لأن قيم x_i ذات قيمة صحيحة، فإن هذا ليس برنامجا خطيا عاديا، بل برنامج عدد صحيح، وبالتالي لا يمكن تطبيق خوارزمية Simplex على حل هذه المسألة.

لحل هذا المثال وجب اتباع الخطوات التالية:

الخطوة1: تكوين جدول.

نكون مجموعة لكل : $V[0,..,n\ ;\ 0,..,W];\ \ 1 \leq i \leq n\ ,\ \ 0 \leq w \leq W$

w / i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0										
2	0										
3	0										
4	0										

نلاحظ أن السطر الأول والعمود الأول يحتوي على أصفار وهذا منطقي ، أي أنه لا يوجد أي عنصر وضعه في الحقيبة فما فائدة ايجاد وزن الحقيبة التي تحوي هذا العنصر ، وكذلك إذا لم تكن لدينا حقيبة فما فائدة حمل العناصر وهكذا، أي:

$$V[0,w] = 0\ \ ;\ \ 0 \leq w \leq W$$

غير معقول (غير مسموح به): $V[i,w] = -\infty\ \ ;\ \ w < 0$

ثانيا:

باقي خانات الجدول يتم ملئوها تصاعديا باستخدام العلاقة التالية:

$$V[i,w] = \max\left[V(i-1\ ,\ w)\ \ ,\ \ v_i + V(i-1\ ,\ w-w_i)\right]$$

$$V[1,1]=\max\left[V(0\ ,\ 1)\quad ,\quad 0+V(0\ ,\ 1-5)\right]=0$$
$$V[1,2]=\max\left[V(0\ ,\ 2)\quad ,\quad 0+V(0\ ,\ 2-5)\right]=0$$
$$V[1,3]=\max\left[V(0\ ,\ 3)\quad ,\quad 0+V(0\ ,\ 3-5)\right]=0$$
$$V[1,4]=\max\left[V(0\ ,\ 4)\quad ,\quad 0+V(0\ ,\ 4-5)\right]=0$$
$$V[1,5]=\max\left[V(0\ ,\ 5)\quad ,\quad 8+V(0\ ,\ 5-5)\right]=8$$
$$V[1,6]=V[1,7]=V[1,8]=V[1,9]=V[1,10]=8$$

$$V[2,1]=\max\left[V(1\ ,\ 1)\quad ,\quad 0+V(1\ ,\ 1-3)\right]=0$$
$$V[2,2]=\max\left[V(1\ ,\ 2)\quad ,\quad 0+V(1\ ,\ 2-3)\right]=0$$
$$V[2,3]=\max\left[V(1\ ,\ 3)\quad ,\quad 6+V(1\ ,\ 3-3)\right]=6$$
$$V[2,4]=\max\left[V(1\ ,\ 4)\quad ,\quad 6+V(1\ ,\ 4-3)\right]=6$$
$$V[2,5]=\max\left[V(1\ ,\ 5)\quad ,\quad 6+V(1\ ,\ 5-3)\right]=8$$
$$V[2,6]=\max\left[V(1\ ,\ 6)\quad ,\quad 6+V(1\ ,\ 6-3)\right]=8$$
$$V[2,7]=\max\left[V(1\ ,\ 7)\quad ,\quad 6+V(1\ ,\ 7-3)\right]=8$$
$$V[2,8]=\max\left[V(1\ ,\ 8)\quad ,\quad 6+V(1\ ,\ 8-3)\right]=14$$
$$V[2,9]=\max\left[V(1\ ,\ 9)\quad ,\quad 6+V(1\ ,\ 9-3)\right]=14$$
$$V[2,10]=\max\left[V(1\ ,\ 10)\quad ,\quad 6+V(1\ ,\ 10-3)\right]=14$$

$$V[3,1]=\max\left[V(2\ ,\ 1)\ \ ,\ \ 0+V(2\ ,\ 1-2)\right]=0$$
$$V[3,2]=\max\left[V(2\ ,\ 2)\ \ ,\ \ 4+V(2\ ,\ 2-2)\right]=4$$
$$V[3,3]=\max\left[V(2\ ,\ 3)\ \ ,\ \ 4+V(2\ ,\ 3-2)\right]=6$$
$$V[3,4]=\max\left[V(2\ ,\ 4)\ \ ,\ \ 4+V(2\ ,\ 4-2)\right]=6$$
$$V[3,5]=\max\left[V(2\ ,\ 5)\ \ ,\ \ 4+V(2\ ,\ 5-2)\right]=10$$
$$V[3,6]=\max\left[V(2\ ,\ 6)\ \ ,\ \ 4+V(2\ ,\ 6-2)\right]=10$$
$$V[3,7]=\max\left[V(2\ ,\ 7)\ \ ,\ \ 4+V(2\ ,\ 7-2)\right]=12$$
$$V[3,8]=\max\left[V(2\ ,\ 8)\ \ ,\ \ 4+V(2\ ,\ 8-2)\right]=14$$
$$V[3,9]=\max\left[V(2\ ,\ 9)\ \ ,\ \ 4+V(2\ ,\ 9-2)\right]=14$$
$$V[3,10]=\max\left[V(2\ ,\ 10)\ \ ,\ \ 4+V(2\ ,\ 10-2)\right]=18$$

$$V[4,1]=\max\left[V(3\ ,\ 1)\ \ ,\ \ 0+V(3\ ,\ 1-2)\right]=0$$
$$V[4,2]=\max\left[V(3\ ,\ 2)\ \ ,\ \ 5+V(3\ ,\ 2-2)\right]=5$$
$$V[4,3]=\max\left[V(3\ ,\ 3)\ \ ,\ \ 5+V(3\ ,\ 3-2)\right]=6$$
$$V[4,4]=\max\left[V(3\ ,\ 4)\ \ ,\ \ 5+V(3\ ,\ 4-2)\right]=9$$
$$V[4,5]=\max\left[V(3\ ,\ 5)\ \ ,\ \ 5+V(3\ ,\ 5-2)\right]=11$$
$$V[4,6]=\max\left[V(3\ ,\ 6)\ \ ,\ \ 5+V(3\ ,\ 6-2)\right]=11$$
$$V[4,7]=\max\left[V(3\ ,\ 7)\ \ ,\ \ 5+V(3\ ,\ 7-2)\right]=15$$
$$V[4,8]=\max\left[V(3\ ,\ 8)\ \ ,\ \ 5+V(3\ ,\ 8-2)\right]=15$$
$$V[4,9]=\max\left[V(3\ ,\ 9)\ \ ,\ \ 5+V(3\ ,\ 9-2)\right]=17$$
$$V[4,10]=\max\left[V(3\ ,\ 10)\ \ ,\ \ 5+V(3\ ,\ 10-2)\right]=19$$

نكمل قيم الجدول السابق والذي نوضحه كما يلي:

w / i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	8	8	8	8	8	8
2	0	0	0	6	6	8	8	8	14	14	14
3	0	0	4	6	6	10	10	12	14	14	18
4	0	0	5	6	9	11	11	15	15	17	19

ثالثا: اختيار العناصر المثلى:

بعد اتمامنا للجدول نبحث عن العناصر المثلى ، نبدأ من أخر خانة (19) $V[4,10]=19$ ، نقارنها مع $V[3,10]=18$ نلاحظ أن هناك قيمتين مختلتين، لو كانت متساوية لتجاهلنا تخصيص العنصر الرابع ونمر مباشرة للسطر الثالث، أول تخصيص للبند 4 يكون وزنه (2) أي $I_4(2kg)$ ، $10-2 = 8$ ، نمر للسطر الثالث والعمود الثامن $V[3,8]=14$ ، نلاحظ أن $V[2,8]=14$ فنتجاهل تخصيص العنصر الثالث ، نمر مباشرة للسطر الثاني ونقارنها مع القيمة $V[1,8]=8$، نلاحظ قيمتين مختلفتين فنخصص العنصر الثاني الذي وزنه $I_2(3kg)$ ، $8-3 = 5$ ، نمر للسطر الأول والعمود 5 ، يكون التخصيص $I_1(5kg)$ ، إذن التحميل الأمثل لهذه الحقيبة يكون كالتالي: قارورة ماء ، برتقال ، ساندويتش بمجموع أهمية 19 ، أي:

$$Max\ Z = 8(1)+6(1)+5(1)=19$$

ملاحظة: يمكن استخدام منطق هذه الطريقة في كثير من الأمْثَلة التطبيقية المتعلقة بالحمولة المثلى : كالسفن ، القطارات، الشاحنات الخاصة بنقل البضائع.

التطبيق على برنامج Maple :

```
> restart;

con := 10 :
w := [5, 3, 2, 2] :
v := [8, 6, 4, 5] :

for j from 1 to con do
for i from 1 to nops(v) do

if i = 1 and j < w[i] then V[i, j] := 0 :   K[i, j] := 0 :
elif i = 1 and j ≥ w[i] then V[i, j] := v[i] : K[i, j] := 1 :  end if:

if i ≠ 1 and j < w[i] then V[i, j] := V[i − 1, j] : K[i, j] := 0 :
elif i ≠ 1 and j = w[i] then V[i, j] := max(v[i], V[i − 1, j]) :
elif i ≠ 1 and j > w[i]then V[i, j] := max(v[i] + V[i − 1, j − w[i]], V[i − 1, j]) : end if:

if i ≠ 1 and j = w[i] and v[i] > V[i − 1, j] then K[i, j] := 1 :
elif i ≠ 1 and j = w[i] and v[i] < V[i − 1, j] then K[i, j] := 0 :  end if:

if i ≠ 1 and j > w[i] and v[i] + V[i − 1, j − w[i]] >  V[i − 1, j] then K[i, j] := 1 :
elif  i ≠ 1 and j > w[i] and v[i] + V[i − 1, j − w[i]] ≤  V[i − 1, j] then K[i, j] := 0 :  end if:

end do:

end do:

interface(rtablesize = 20) :

ValueM := Matrix(nops(v), con, (i, j) → V[i, j]);
KeepM := Matrix(nops(v), con, (i, j) → K[i, j]);

cc := con :
sel := [ ] :

for j from nops(v) to 1 by -1 do

if K[j, cc] = 1 and w[j] ≤ cc  then sel := [op(sel), j] :  cc := cc − w[j] : else  next;  end if :

end do :

[[Total value = add(v[sel[i]], i = 1 ..nops(sel))], [Total weight = add(w[sel[i]], i = 1 ..nops(sel))], selection = sort(sel, `<`), ] ;
```

$$ValueM := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 0 & 0 & 6 & 6 & 8 & 8 & 8 & 14 & 14 & 14 \\ 0 & 4 & 6 & 6 & 10 & 10 & 12 & 14 & 14 & 18 \\ 0 & 5 & 6 & 9 & 11 & 11 & 15 & 15 & 17 & 19 \end{bmatrix}$$

$$KeepM := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[[Total\ value = 19], [Total\ weight = 10], selection = [1, 2, 4]]$$

8-5- نموذج حجم قوة العمل Work-Force Size Model

في بعض مشاريع البناء تتم عملية التوظيف وتسريح العمال دوريا للحفاظ على قوة عاملة تلبي احتياجات المشروع، وبالنظر إلى أن أنشطة التوظيف والتسريح تتولد تكاليف إضافية قد تكون عائق في نجاح مشروع هذه الشركة ، يتبلور التساؤل التالي: كيف يمكن الحفاظ على القوة العاملة اللازمة طوال حياة المشروع ؟

نفترض أنه سيتم تنفيذ المشروع على مدار n شهر وأن الحد الأدنى من القوى العاملة المطلوبة في الشهر i هو b_i عامل ، من الناحية النظرية يمكننا استخدام التوظيف والتسريح للحفاظ على قوة العمل في الشهر i مساواة بالضبط b_i ، بدلا من ذلك قد يكون من الناحية الاقتصادية الحفاظ على قوة عاملة أكبر من الحد الأدنى من المتطلبات من خلال التوظيف الجديد.

بالنظر إلى x_i : العدد الفعلي للعمال العاملين في الشهر i ، يمكن تكبد تكلفتان في الشهر i: $C_1(x_i - b_i)$: تكلفة الاحتفاظ بالعمالة الاضافية مع $x_i > b_i$ و

$C_2(x_i - x_{i-1})$: تكلفة توظيف عمال إضافيين مع $x_i > x_{i-1}$ ، من المفترض أنه لا يتم تكبد أي تكلفة إضافية عند إيقاف العمل.

يتم تعريف عناصر نموذج البرمجة الديناميكية على النحو التالي:

أ. المرحلة الأولى ممثلة بالشهر i ، $i = 1, 2, ..., n$

ب. البدائل في المرحلة i هي x_i ، عدد العمال في الشهر i.

ج. يتم تمثيل الحالة في المرحلة الأولى بعدد العمال المتاحين في المرحلة (الشهر) $i-1$ ، x_{i-1}.

يتم إعطاء المعادلة التراجعية للبرمجة الديناميكية كالتالي:

$$f_i(x_{i-1}) = \min_{x_i \geq b_i} \{C_1(x_i - b_i) + C_2(x_i - x_{i-1}) + f_{i+1}(x_i)\} \; , \; i = 1, 2, ..., n$$
$$f_{n+1}(x_n) = 0$$

تبدأ الحسابات في المرحلة n مع $x_n = b_n$ وتنتهي في المرحلة 1.

تطبيق3:

يقدر مسؤول التخطيط في شركة البناء أن حجم قوة العمل اللازمة على مدار الستة أشهر القادمة تكون كالتالي: 150 ، 200 ، 110 ، 250 ، 180 ، 210 عامل ، ستكلف العمالة الزائدة في هذه الشركة 20000 دج لكل عامل في الشهر ، وستتحمل تكاليف التوظيف الجديد في أي شهر تكلفة ثابتة مقدارها 30000 دج بالإضافة إلى 50000 دج لكل عامل في الشهر.

المطلوب:

ما هو أفضل قرار تتخذه هذه الشركة من ناحية التوظيف وتسريح عمال جدد ؟ أي المحافظة على القوة العاملة المثلى ؟

حل التطبيق3:

يتم تلخيص بيانات المسألة كالتالي :

$C_1 = 2DA$: تكلفة الاحتفاظ بالعمالة الاضافية و $C_2 = 5DA$: تكلفة توظيف عمال إضافيين، تكاليف ثابتة: $C_3 = 3DA$.

ملاحظة: المبالغ بـ 10^4 دينار جزائري.

الأشهر	1	2	3	4	5	6
عدد العمال	150	200	110	250	180	210

		110			
150		150			
180		180		180	
200	200	200		200	
210	210	210		210	210
250	250	250	250	250	250

أولا: نشكل جدول نحدد فيه المتبقي من احتياج العمال من خلال الشهر السابق، مثلا في الشهر السادس كان المخطط له 210 عامل والشهر الخامس كان 180 عامل،

فتحديد احتياجات يكون حسب المتبقي أي (180، 200، 210)،(القيم تكون حسب المخطط له من الأشهر السابقة) وهكذا مع بقية الأشهر.

ثانيا: نبدأ بحساب احتياج كل مرحلة من خلال تحديد العمالة الفائضة و العمالة الناقصة.

المرحلة 6
الشهر 6
b=210

المرحلة 5
الشهر 5
b=180

x_5	$C_1(x_i - 210) + C_2(x_i - x_{i-1})$ 210	$f_6(x_5)$	x_6^*
180	2(0)+3+5(30)=153	153	210
200	2(0)+3+5(10)= 53	53	210
210	2(0)+0+0=0	0	210
250	0+0+0=0	0	210

بالنسبة للشهر السادس كان الحد الأدنى للقوة العاملة مساويا لـ 210 عامل ، ومن خلال الشهر الخامس كان هذا الحد مساوي لـ 180 عامل، أي أن الشركة قد تتحمل تكاليف توظيف لـ 30 عامل $5(30)=150DA$ أو 10 عمال $\left(5(10)=50DA\right)$، بالإضافة إلى التكاليف الثابتة كتعينات (توظيف) جديدة والمقدرة بـ 3 دج، وهكذا يكون التفسير بنفس الكيفية لبقية الأشهر.

المرحلة 5
الشهر 5
b=180

المرحلة 4
الشهر 4
b=250

x_4	$C_1(x_i-180)+C_2(x_i-x_{i-1})+C_3+f_6(x_5)$				$f_5(x_4)$	x_5^*
	180	200	210	250		
250	153	93	60	140	60	210

$$2(180-180)+0+153=153$$
$$2(200-180)+0+53=93$$
$$2(210-180)+0+0=60$$
$$2(250-180)+0+0=140$$

المرحلة 4
الشهر 4
b=250

المرحلة 3
الشهر 3
b=110

x_3	$C_1(x_i-250)+C_2(x_i-x_{i-1})+C_3+f_5(x_4)$ 250	$f_4(x_3)$	x_4^*
110	2(0)+3+5(140)+60=763	763	250
150	2(0)+3+5(100)+60= 563	563	250
180	2(0)+3+5(70)+60= 413	413	250
200	2(0)+3+5(50)+60= 313	313	250
210	2(0)+3+5(40)+60= 263	263	250
250	2(0)+0+60= 60	60	250

المرحلة
3
الشهر 3
b=110

المرحلة
2
الشهر 2
b=200

x_2	$C_1(x_i-110)+C_2(x_i-x_{i-1})+C_3+f_4(x_3)$						$f_3(x_2)$	x_3^*
	110	150	180	200	210	250		
200	763	643	553	493	516	593	493	200
210	763	643	553	493	463	543	493	200
250	763	643	553	493	260	340	260	210

$$(110)\begin{cases}2(110-110)+0+763=763\\2(110-110)+0+763=763\\2(110-110)+0+763=763\end{cases}$$

$$(150)\begin{cases}2(150-110)+0+563=643\\2(150-110)+0+563=643\\2(150-110)+0+563=643\end{cases}$$

$$(180)\begin{cases}2(180-110)+0+413=553\\2(180-110)+0+413=553\\2(180-110)+0+413=553\end{cases}$$

$$(200)\begin{cases}2(200-110)+0+313=493\\2(200-110)+0+313=493\\2(200-110)+0+313=493\end{cases}$$

$$(210)\begin{cases}2(210-110)+3+5(210-200)+263=516\\2(210-110)+0+5(210-210)+263=463\\2(210-110)+0+60=260\end{cases}$$

$$(250)\begin{cases}2(250-110)+3+5(250-200)+60=593\\2(250-110)+3+5(250-210)+60=543\\2(250-110)+0+5(250-250)+60=340\end{cases}$$

المرحلة 2 **المرحلة 1**

الشهر 2 **الشهر 1**

b=200 **b=150**

x_1	$C_1(x_i-200)+C_2(x_i-x_{i-1})+C_3+f_3(x_2)$			$f_2^*(x_1)$	x_2^*
	200	210	250		
150	746	816	863	746	200
180	596	666	713	596	200
200	493	566	613	493	200
210	493	513	563	493	200
250	493	513	360	360	250

$$(200)\begin{cases} 2(200-200)+3+5(200-150)+493=746 \\ 2(200-200)+3+5(200-180)+493=596 \\ 0+0+0+493=493 \\ 0+0+0+493=493 \\ 0+0+0+493=493 \end{cases}$$

$$(210)\begin{cases} 2(210-200)+3+5(210-150)+493=816 \\ 2(210-200)+3+5(210-180)+493=666 \\ 2(210-200)+3+5(210-200)+493=566 \\ 2(210-200)+0+0+493=513 \\ 2(210-200)+0+0+493=513 \end{cases}$$

$$(250)\begin{cases} 2(250-200)+3+5(250-150)+260=863 \\ 2(250-200)+3+5(250-180)+260=863 \\ 2(250-200)+3+5(250-50)+260=613 \\ 2(250-200)+3+5(250-40)+260=563 \\ 2(250-200)+0+0+260=360 \end{cases}$$

المرحلة 1
الشهر 1
b=150

x_0	$C_1(x_i-150)+C_2(x_i-x_{i-1})+C_3+f_2^*(x_1)$					$f_1(x_0)$	x_1^*
	150	180	200	210	250		
0	1499	1559	1596	1666	1813	1499	150

$$2(150-150)+3+5(150-0)+746=1499$$
$$2(180-150)+3+5(180-0)+596=1559$$
$$2(200-150)+3+5(200-0)+493=1596$$
$$2(210-150)+3+5(210-0)+493=1666$$
$$2(250-150)+3+5(250-0)+360=1813$$

من خلال إجراء الحسابات الخلفية backward، تكون التكلفة الإجمالية لتوظيف العمال

محسوبة من المرحلة 6 إلى المرحلة 0، تظهر النتيجة أن الحد الأدنى لتكلفة التوظيف هو 14990000 دج ، حيث أن العدد الأمثل لتعيين العمال من الشهر الأول إلى الشهر السادس وسياسات قرار (التوظيف / تسريح) مبينة في الجدول التالي:

الشهر	الحد الأدنى لقوة العمل bi	قوة العمل الحالية xi	القرار	التكلفة
1	150	150	توظيف 150	$3+5(150)=753DA$
2	200	200	توظيف 50	$3+5(50)=253DA$
3	110	200	-	$2(90)=180DA$
4	250	250	توظيف 50	$3+5(50)=253DA$
5	180	210	تسريح 40	$2(30)=60DA$
6	210	210	-	-
مجموع التكاليف				**1499 دج**

x_1^*	0	150
x_2^*	150	200
x_3^*	200	200
x_4^*	200	250
x_5^*	250	210
x_6^*	210	210

بعد استخدام طريقة البرمجة الديناميكية تم اقتراح سياسة القرار الأمثل والتي تتطلب تشغيل 150 ، 200 ، 200، 250، 210 ، 210 عامل من الشهر الأول إلى غاية الشهر السادس.

8-6- مسألة الاستثمار(أمثلة الاستثمار) INVESTMENT OPTIMIZATION :

الغاية من ممارسة توزيع الأموال بين الاستثمارات المختلفة هو لتقليل المخاطر ، فالتنويع هو استراتيجية يمكن تلخيصها بدقة على النحو التالي " لا تضع كل البيض في سلة واحدة " (مثل عالمي) ، لذا سيتم توضيح أهمية البرمجة الديناميكية في ايجاد المزيج الأمثل بين المبالغ المستثمرة الذي يحقق أقصى عائد من بين عدة خيارات متوفرة للاستثمار.

مبدأ بيلمان للأمثلة:

نفرض أن الدوال $f_1(x_1), f_1(x_2),......, f_n(x_n)$ تُكونُ دالة هدف ، نوضحها على النحو الاتي:

$$F\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) = f_1\left(x_1\right) + f_2\left(x_2\right) + ... + f_n\left(x_n\right)$$

يكمن حل المسألة في العثور على قيمة المتغيرات $\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ عندما تكون دالة الهدف في حالة التعظيم، وتخضع للقيود التالية:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n \leq b_n$$
$$a_j \geq 0 \ , \quad x_j \geq 0 \ , \quad j = 1, ..., \mathrm{n} \ , \ b_n \geq 0$$

ندرج الدوال التالية : $\left\{F_k\left(x_k\right)\right\}$، حيث الصيغة العامة تكون على النحو الاتي:

$$F_k\left(b_k\right) = \max_{x_k \leq b_k / a_k} \left\{f_k\left(b_k\right) + F_{k-1}\left(b_k - a_k x_k\right)\right\} .... (I), k = 2, ..., n$$

$$F_0\left(x_0\right) = 0$$

بالنظر إلى المعادلة الأخيرة (I) حيث $n = k$، وبالنسبة للعدد الوحيد $b_n \geq 0$ تكون القيمة $x_n^* = x_n\left(b_n\right)$ والتي من أجلها نكتب: $(Max)F = F_n\left(b_n\right)$.

بمعنى أخر تصل دالة الهدف إلى أقصى قيمتها في التكرار الأخير $F_n\left(b_n\right)$.

أخيرا نحدد مجموعة القيم المثلى التي تم حسابها ، قد تكون قيمة واحدة أو أكثر $\left(x_1^*, ..., x_n^*\right)$ ، حيث تحقق دالة الهدف المعظمة والتي من خلالها نحدد الاستراتيجية المثلى التي تكون على النحو التالي: $U^* = \left(x_1^*, ..., x_n^*\right)$.

تطبيق4:

نفرض أن لدينا مبلغ 300000 دج نود استثمارها من أجل تحقيق أقصى ربح، ولدينا ثلاثة خيارات استثمار متاحة، حيث يتفاوت عائد الاستثمار من خيار لأخر وفقا

لطبيعة الاستثمار والمبلغ المستثمر، مصفوفة العائد المتوقع حسب الخيارات والمبلغ المستثمر مبينة في الجدول التالي:

الاستثمار	خيار1	خيار2	خيار3
75000	12500	10000	15000
150000	20000	18500	25000
225000	35000	32500	30000
300000	45000	50000	40000

المطلوب:

استخدم تقنية البرمجة الديناميكية لتحديد مزيج الاستثمار الأمثل والذي بفضله يحقق أقصى عائد محقق.

حل التطبيق4:

نرمز $f_i(x_i)$ إلى الربح المتوقع بعد استثمار المجموع x_i في الخيار i ، حيث: $i = 1,2,3$ نرمز $F(x_1, x_2, x_3)$ إلى دالة الهدف، حيث تشير إلى الربح الإجمالي الذي يتم تحقيقه من خلال استثمار مبلغ 300000 دج في الخيارات : الأول ، الثاني ، الثالث ، نموذج هذه المسألة سيكون وفق الشكل التالي:

$$Max(x_1, x_2, x_3) = f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3)$$
$$ST = \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 300000DA \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

بعد ذلك يمكننا تطبيق مبدأ بيلمان للأمثلة ، والذي تم وصف خوارزميته كما سبق ذكره ، فإن هذه المسألة يتم حلها على مراحل ، علما أن نتيجة مرحلة واحدة تعتمد على النتيجة المكتسبة في المرحلة السابقة، يتم تحديد الدوال $F_k(b_k)$ على الاتي من أجل $k = 1,2,3$ ، حيث يجب أخذ بعين الاعتبار:

$$b_k \in \{0, 75000, 150000, 225000, 300000\}, k = 1,2,3$$

قيمة الدالة $F_1(b_1)$ يتم ايجادها من المرحلة الأولى وفق الطريقة التالية:

$F_1(b_1) = Maxf_1(x_1)$.

قيم الدالة تكون كما يلي:

$$F_1(0) = 0 \; , \; F_1(75000) = 12500 \; , \; F_1(150000) = 20000$$
$$F_1(225000) = 35000 \; , \; F_1(300000) = 45000$$

تحدد المرحلة التالية التخصيص الأمثل للاستثمار في الخيارين الأول والثاني ، لذا فإن دالة الهدف $F_2(b_2)$ نكتبها وفقا للشكل التالي:

$$F_2(b_2) = \max_{x_2 \leq b_2} \{ f_2(b_2) + F_1(b_2 - x_2) \}$$

بالنسبة لـ $b_2 = 0$:

$$F_2(0) = \max_{x_2 \leq 0} \{ f_2(0) + F_1(0 - x_2) \} = 0 \; ; \; x_2 = 0$$

بالنسبة لـ $b_2 = 75000$:

$$F_2(75000)=\max_{x_2\le 75000}\left\{f_2(75000)+F_1(75000-x_2)\right\}$$

$$\therefore \max\begin{Bmatrix} f_2(0)+F_1(75000) \\ f_2(75000)+F_1(0)\end{Bmatrix}=\max\begin{Bmatrix}0+12500\\10000+0\end{Bmatrix}=12500 \;\; ; \;\; x_2=0$$

بالنسبة لـ $b_2=150000$:

$$F_2(150000)=\max_{x_2\le 150000}\left\{f_2(150000)+F_1(150000-x_2)\right\}$$

$$\therefore \max\begin{Bmatrix} f_2(0)+F_1(150000) \\ f_2(75000)+F_1(75000) \\ f_2(150000)+F_1(0)\end{Bmatrix}=\max\begin{Bmatrix}0+20000\\10000+12500\\18500+0\end{Bmatrix}=22500 \;\; ; \;\; x_2=75000$$

بالنسبة لـ $b_2=225000$:

$$F_2(225000)=\max_{x_2\le 225000}\left\{f_2(225000)+F_1(225000-x_2)\right\}$$

$$\therefore \max\begin{Bmatrix} f_2(0)+F_1(225000) \\ f_2(75000)+F_1(150000) \\ f_2(150000)+F_1(75000) \\ f_2(225000)+F_1(0)\end{Bmatrix}=\max\begin{Bmatrix}0+35000\\10000+20000\\18500+12500\\32500+0\end{Bmatrix}=35000 \;\; ; \;\; x_2=0$$

بالنسبة لـ $b_2=300000$:

$$F_2(300000)=\max_{x_2\le 300000}\left\{f_2(300000)+F_1(300000-x_2)\right\}$$

$$\therefore \max\begin{Bmatrix} f_2(0)+F_1(300000) \\ f_2(75000)+F_1(225000) \\ f_2(150000)+F_1(150000) \\ f_2(225000)+F_1(75000) \\ f_2(300000)+F_1(0)\end{Bmatrix}=\max\begin{Bmatrix}0+45000\\10000+35000\\18500+20000\\32500+12500\\50000+0\end{Bmatrix}=50000 \;\; ; \;\; x_2=300000$$

بالنسبة للمفاضلة في الاختيار الأمثل للاستثمار في الخيار الثاني الذي سيحقق أقصى الربح هو الاستثمار بمبلغ $x_2 = 300000DA$.

أخيرا، في المرحلة الثالثة، تخصيص الأموال بين الخيارات الثلاثة، دالة الهدف $F_3(b_3)$ تكون كما يلي: $F_3(b_3) = \max\limits_{x_3 \le b_3}\{f_3(b_3) + F_2(b_3 - x_3)\}$.

بالنسبة لـ $b_3 = 0$:

$$F_0(0) = \max_{x_0 \le 0}\{f_3(0) + F_2(0 - x_0)\} = 0 \;\; ; \;\; x_3 = 0$$

بالنسبة لـ $b_3 = 75000$:

$$F_3(75000) = \max_{x_3 \le 75000}\{f_3(75000) + F_2(75000 - x_3)\}$$

$$\therefore \max\begin{Bmatrix} f_3(0) + F_2(75000) \\ f_3(75000) + F_2(0) \end{Bmatrix} = \max\begin{Bmatrix} 0 + 12500 \\ 15000 + 0 \end{Bmatrix} = 15000 \;\; ; \;\; x_3 = 75000$$

بالنسبة لـ $b_3 = 150000$:

$$F_3(150000) = \max_{x_3 \le 150000}\{f_3(150000) + F_2(150000 - x_3)\}$$

$$\therefore \max\begin{Bmatrix} f_3(0) + F_2(150000) \\ f_3(75000) + F_2(75000) \\ f_3(150000) + F_2(0) \end{Bmatrix} = \max\begin{Bmatrix} 0 + 20000 \\ 15000 + 12500 \\ 25000 + 0 \end{Bmatrix} = 27500 \;\; ; \;\; x_3 = 75000$$

بالنسبة لـ $b_3 = 225000$:

$$F_3(225000)=\max_{x_3\le 225000}\{f_3(225000)+F_2(225000-x_3)\}$$

$$\therefore \max\begin{Bmatrix} f_3(0)+F_1(225000)\\ f_3(75000)+F_1(150000)\\ f_3(150000)+F_1(75000)\\ f_3(225000)+F_1(0)\end{Bmatrix}=\max\begin{Bmatrix}0+35000\\15000+22500\\25000+12500\\30000+0\end{Bmatrix}=37500\ ;\ x_3=75000/150000$$

بالنسبة لـ $b_3=300000$:

$$F_3(300000)=\max_{x_3\le 300000}\{f_3(300000)+F_2(300000-x_3)\}$$

$$\therefore \max\begin{Bmatrix} f_3(0)+F_2(300000)\\ f_3(75000)+F_2(225000)\\ f_3(150000)+F_2(150000)\\ f_3(225000)+F_2(75000)\\ f_3(300000)+F_2(0)\end{Bmatrix}=\max\begin{Bmatrix}0+50000\\15000+35000\\25000+22500\\30000+12500\\40000+0\end{Bmatrix}=50000\ ;\ x_3=0/75000$$

بالنسبة للمفاضلة في الاختيار الأمثل للاستثمار في الخيار الثاني الذي سيحقق أقصى الربح هو الاستثمار بمبلغ $x_2=300000DA$ أو الاستثمار بمبلغ $x_2=225000DA$ في الخيار الثاني و بمبلغ $x_3=75000DA$ في الخيار الثالث.

نلخص فيما سبق في الجدول التالية:

الاستثمار	x_1	$F_1(x_1)$	x_2	$F_2(x_2)$	x_3	$F_3(x_3)$
0	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
75000	75000	12500	0	12500	75000	15000
150000	150000	20000	75000	22500	75000	27500

37500	150000/75000	35000	0	35000	225000	**225000**
50000	75000/0	50000	300000	45000	300000	**300000**

الحل الأمثل:

المبلغ المستثمر	خيار الاستثمار	عائد الاستثمار
75000	الثالث	15000
225000	الثاني	35000
300000	**المجموع**	**50000**

أو :

المبلغ المستثمر	خيار الاستثمار	عائد الاستثمار
300000	الثاني	50000
300000	**المجموع**	**50000**

الأعلام المذكورة في الفصل الثامن:



ريتشارد إرنست بيلمان
Richard Ernest Bellman
(1984 -1920)

قائمة المراجع:

أ) **الكتب باللغة العربية:**

1) محمد بداوي، الاحتمالات، درا هومة ، الجزائر، 2017.
2) محمد بداوي، الاحصاء الاستدلالي، درا هومة ، الجزائر، 2017.
3) محمد راتول ، بحوث العمليات، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر ، 2004.
4) فتحي خليل الحمدان، بحوث العمليات، دار وائل ، عمان، 2010.
5) سليمان صالح الحيمدان، طرق النقطة الداخلية للبرمجة الخطية وغير الخطية، العبيكان ، الرياض ، 2010/1431.
6) محمد حازي، الدوال ذات عدة متغيرات، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 2015.
7) عفاف على حسن الدش، بحوث العمليات واتخاذ القرارات ، الجزء الأول، ط2 ، 2012 ، مكتبة عين شمس.
8) لطفي تاج ، عمار محمود سرحان ، مقدمة في العمليات العشوائية ، جامعة الملك سعود ، الرياض، 2006/1428 .

ب) **الدروس والمحاضرات والمجلات:**

1) محمد بداوي ، الاحصاء والاحتمالات 1 و 2 سنة ثالثة ورابعة ، قسم الرياضيات ، المدرسة العليا للأساتذة بالأغواط ، 2019/ 2021.
2) محمد بداوي ، تطبيق الاختبارات الاحصائية ، سنة أولى ماستر تخطيط وسكان ، قسم علم الاجتماع والديموغرافيا ، 2019.

ت) الكتب باللغة الأجنبية:

1) Stefan M. Stefanov , Separable Optimization :Theory and Methods, Second Edition , Springer , Switzerland ,2021.
2) Anderson, Sweeney, Williams and Wisniewski , An Introduction to Management Science: Quantitative Approaches to Decision Making, 2nd Edition , United Kingdom , 2014.
3) David R. Anderson, Dennis J. Sweeney, Thomas A. Williams, Jeffrey D. Camm, &
4) Kipp Martin , An Introduction to Management Science: Quantitative Approaches to Decision Making, Revised Thirteenth Edition , United States of America , 2012.
5) Giuseppe Modica and Laura Poggiolini , A First Course in Probability and Markov Chains , John Wiley & Sons , United Kingdom, 2013.
6) Frederick S. Hillier, Camille C. Price, Markov Chains : Models, Algorithms and Applications , Second Edition , Springer New York , 2013.
7) Nicolas Privault , Understanding Markov Chains : Examples and Applications , Springer Singapore Heidelberg New York Dordrecht London , 2013.
8) FREDERICK S. HILLIER, GERALD J. LIEBERMAN , INTRODUCTION TO OPERATIONS RESEARCH , Seventh Edition , McGraw-Hill Higher Education , New York, 2001.
9) Yadolah Dodge , Optimisation appliquée , Springer ,Paris , 2002.
10) Mohamed Aidene , Brahim oukacha, Recherche opérationnelle : programmation linéaire , pages bleues , Alger , 2007.
11) Fatiha kacher , Karima bouibed , La Théorie des jeux , pages bleues , Alger , 2012.
12) Ali Bougherra , La : programmation linéaire , editions Houma , Alger , 2010.
13) Wayne L. Winston , Operations Research AP P LI CATI O N S AND A LGORITHMS FO URTH EDITION, Library of Congress ,USA , 2003.
14) Paul E. Fishback , Linear and Nonlinear Programming with Maple: An Interactive,

15) Applications-Based Approach , Chapman and Hall/CRC , Londres , 2019.
16) Xin-She Yang , Optimization Techniques and Applications with Examples , John Wiley & Sons ,USA, 2018 .
17) Jan A. Snyman · Daniel N. Wilke , Practical Mathematical Optimization , Second Edition , Library of Congress Control , USA , 2018.
18) Nick T. Thomopoulos , Fundamentals of Queuing Systems , Springer New York Heidelberg Dordrecht London , 2012.
19) HEIZER J A Y , B A R R Y RENDER , C H U C K MUNSON ,O P E R AT I O N S MANAGEMENT , Pearson Education , USA , 2017.
20) A. Ravi Ravindran , Operations research and management science handbook , Taylor & Francis Group , USA , 2008.
21) Malika Babes , statistiques , files d'attente et simulation , opu, Alger ,1995.

ث) الدروس باللغة الأجنبية:

1) Branislav L. Slantchev , Game Theory: Elements of Basic Models , Department of Political Science, University of California – San Diego April 23, 2009.

2) Michel Bierlaire , Optimisation en nombres entiers , EPFL - Laboratoire Transport et Mobilité – ENAC.

3) Bibhas C. Giri , Dynamic Programming , Department of Mathematics Jadavpur University Kolkata, India.

4) Bibhas C. Giri , Non-linear Programming, Department of Mathematics Jadavpur University Kolkata, India.

5) Kungliga Tekniska Hogskolan , Division of Optimization and Systems Theory Department of Mathematics Stockholm, Sweden , 2014.

6) Aimé LACHAL , Modélisation en univers aléatoire , INSA LYON.

ج) مواقع الكترونية :

https://www.toppr.com/guides/maths/linear-programming/graphical-method-of-solving-a-linear-programming-problem/

https://www.analyticsvidhya.com/blog/2017/02/lintroductory-guide-on-linear-programming-explained-in-simple-english/
http://www.universalteacherpublications.com/univ/ebooks/or/Ch3/twophase.htm

The Use of the Duality Principle to Solve Optimization Problems The Use of the Duality Principle to Solve Optimization Problems
https://doi.org/10.3991/ijes.v6i1.8224 Dr. Rowland Jerry Ekeocha!!", Uzor Chukwunedum, Anetor Clement Covenant University, Ota, Nigeria.
https://businessjargons.com/least-cost-method.html#:~:text=Definition%3A%20The%20Least%20Cost%20Method,the%20least%20cost%20of%20transportation

https://www.engineeringenotes.com/project-management-2/operations-research/testing-the-optimality-of-transportation-solution-operations-research/15526

http://ecoursesonline.iasri.res.in/mod/resource/view.php?id=4973

https://www.geeksforgeeks.org/difference-between-pert-and-cpm/

http://www.universalteacherpublications.com/univ/ebooks/or/Ch7/cutplalgo.htm

https://www.techno-science.net/definition/6355.html

https://towardsdatascience.com/nonlinear-programming-theory-and-applications-cfe127b6060c

https://www.hindawi.com/journals/jam/2017/9037857/

https://www.tutorialspoint.com/design_and_analysis_of_algorithms/design_and_analysis_of_algorithms_dynamic_programming.htm

https://julia.quantecon.org/dynamic_programming/short_path.html

https://www.techno-science.net/definition/6426.html

https://slideplayer.com/slide/3962969/

https://towardsdatascience.com/markov-chains-simply-explained-dc77836b47e3
https://brilliant.org/wiki/markov-chains/

https://queue-it.com/blog/queuing-theory/#:~:text=Queuing%20theory%20(or%20queueing%20theory,customer%2C%20job%2C%20or%20request.

http://www.xavierdupre.fr/app/mlstatpy/helpsphinx/c_garden/file_dattente.html
https://corporatefinanceinstitute.com/resources/knowledge/other/littles-law/

https://www.unleashedsoftware.com/blog/what-are-inventory-costs
https://xplaind.com/724780/quantity-discount

https://bizfluent.com/info-8628296-single-period-inventory-model.html

https://www.twi-global.com/technical-knowledge/faqs/faq-what-is-simulation

https://datascience.eu/fr/mathematiques-et-statistiques/definition-de-la-simulation-de-monte-carlo/

https://www.influxdata.com/what-is-time-series-data/

https://docs.oracle.com/cd/E16582_01/doc.91/e15111/und_forecast_levels_methods.htm#EOAFM00177

functions and region shapes kkt conditions and quadratic programming , www.researchgate.net

wikipedia.org.

https://www.maplesoft.com/

View publication stats